

Д. А. ПОПОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФУЗИОННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

(Представлено академиком А. Н. Фрумкинским 15 V 1970)

В настоящей работе рассматривается задача стационарной конвективной диффузии в полубесконечном канале с поглощающими стенками. Профиль скорости предполагается пуазейлевским на всей длине канала. Мы предположим также, что скорость течения достаточно велика и на этом основании пренебрежем продольной диффузией. Эта задача рассматривалась многими авторами (¹, ²), причем использовались два существенно различных подхода к ее решению. Первый подход связан с приближением диффузионного пограничного слоя (¹). Он дает приближение, справедливое вблизи начала канала, и применим только при определенных граничных условиях на входе в канал. Второй сводится просто к применению метода разделения переменных (²). В принципе он позволяет выписать точное решение при любых граничных условиях на входе в канал. Это решение имеет форму ряда, первые члены которого дают асимптотику решения на больших расстояниях от начала канала. Мы будем использовать метод разделения переменных и покажем, как при его помощи получить выражение для плотности потока вещества на стенку канала, пригодное для любых расстояний от входа.

Математическое дело сводится к решению следующей краевой задачи:

$$(1 - y^2) \delta C / \delta x = \varepsilon \delta^2 C / \delta y^2, \quad 0 \leq x < \infty, \quad -1 \leq y \leq 1;$$
$$C|_{x=0} = \varphi(y), \quad C|_{y=\pm 1} = 0.$$

Все переменные безразмерны и приняты следующие обозначения: $C(xy)$ — концентрация вещества, $\varepsilon = D/Vh$ — число Пекле, D — коэффициент диффузии, h — полуширина канала (единица длины), V — скорость потока на оси канала.

Ограничимся случаем четной $\varphi(y)$. Формальное решение задачи можно легко получить методом разделения переменных:

$$C(xy) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\varepsilon x \mu_k^2} Y_k(y),$$

$$Y_k(y) = e^{-\frac{1}{2} \mu_k y^2} \Phi((1 - \mu_k) / 4, \frac{1}{2}, \mu_k y^2),$$

где μ_k — положительные корни уравнения:

$$\Phi((1 - \mu) / 4, \frac{1}{2}, \mu) = 0.$$

Коэффициенты A_k определяются из граничных условий на входе в канал:

$$A_k = \int_{-1}^0 \varphi(y) (1 - y^2) Y_k(y) dy \bigg/ \int_{-1}^0 Y_k^2(y) (1 - y^2) dy.$$

Заметим, что Y_k является четным решением задачи Штурма — Лувилля:

$$Y''(y) + \mu^2(1 - y^2)Y = 0, \quad Y|_{y=\pm 1} = 0. \quad (1)$$

В дальнейшем мы рассматриваем случай $\varphi(y) = 1$.

Нас будет интересовать величина плотности тока вещества на стенку:

$$j(x) = \frac{\partial C}{\partial y}(x) \Big|_{y=-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\epsilon x \mu_k^2} Y'_k(-1). \quad (2)$$

Для «больших» x ($\epsilon x > 1$) в ряду (2) можно ограничиться несколькими первыми членами и воспользоваться приведенными в (2) результатами машинного расчета A_k , μ_k , однако чтобы найти плотность тока при «малых» x , необходимо учесть все члены ряда (2). Это ясно хотя бы из того, что $j(x)$ имеет особенность при $x = 0$ вследствие разрыва граничных условий, тогда как каждый член ряда (2) конечен.

Наша задача будет состоять в получении асимптотических выражений для $Y_k(y)$, A_k , μ_k при больших μ (больших k). Для получения равномерной по y в $[-1, +1]$ асимптотики $Y_k(y)$ при $k \rightarrow \infty$ используем метод Лангера (3). Он основан на исследовании поведения решений уравнения (1) при $\mu \rightarrow \infty$. Чтобы иметь уравнение с одной точкой поворота, мы воспользуемся четностью решения, ограничимся интервалом $[-1, 0]$ и перепишем граничные условия в виде

$$Y(-1) = 0, \quad Y'(-1) = 0. \quad (3)$$

Не останавливаясь на деталях вычислений, выпишем первый член асимптотики общего решения уравнения (1) при $\mu \rightarrow \infty$

$$Y \simeq \tilde{Y}(y) = B(\varphi')^{-1/2} \varphi^{1/2} J_{1/2}(\sqrt{2/3} \mu \varphi^{3/2}) + B'(\varphi')^{-1/2} \varphi^{1/2} I_{1/2}(\sqrt{2/3} \mu \varphi^{3/2}),$$

где $\sqrt{2/3} \mu \varphi^{3/2}(y) \stackrel{\text{обозн}}{=} h(y) = \sqrt{1-y^2} y + \arcsin y + \pi/2$; B , B' — произвольные постоянные. В дальнейшем тильда над символом или знак \simeq означает, что справа стоит асимптотика соответствующей величины при $k \rightarrow \infty$ ($\mu \rightarrow \infty$).

Из условия $\tilde{Y}(-1) = 0$ легко получим $B' = 0$.

Второе граничное условие $\tilde{Y}'(0) = 0$ дает уравнение для спектра. Используя обычную асимптотику функций Бесселя, найдем

$$\mu_k \simeq \tilde{\mu}_k = 4k + 2/3.$$

Переходим к расчету интегралов:

$$A_k = \int_{-1}^0 \tilde{Y}_k(t) (1-t^2) dt \Big/ \int_{-1}^0 Y_k^2(t) (1-t^2) dt = \tilde{I}_{1k} / \tilde{I}_{2k};$$

$$\tilde{Y}_k = \frac{\sqrt{3}}{2} B_k h^{1/2}(t) (1-t^2)^{-1/2} J_{1/2}(\mu_k h/2). \quad (4)$$

Интегрируя уравнение (1), получим

$$\int_{-1}^0 (1-t^2) Y_k dt = \mu_k^{-2} Y'_k(-1),$$

отсюда следует

$$\tilde{I}_{1k} \simeq Y'_k(-1) \mu_k^{-2} = B_k a \mu_k^{-2/3}, \quad a = 2^{1/2} / 3^{1/2} \Gamma(4/3). \quad (5)$$

С другой стороны,

$$\tilde{I}_{2k} = 3/8 B_k^2 \int_0^{\pi/2} h J_{1/2}^2 \left(\frac{\mu_k h}{2} \right) dh \simeq 3/8 B_k^2 \mu_k^{-1}, \quad (6)$$

где мы воспользовались соотношением

$$\int_0^{\pi/2} z J_{\nu}^2(\alpha z) dz = \frac{z^2}{2} \{ J_{\nu}^2(\alpha z) - J_{\nu-1}(\alpha z) J_{\nu+1}(\alpha z) \}.$$

Константы B_k можно определить из условия:

$$\tilde{Y}_k(0) = Y_k(0) = 1.$$

Это дает

$$B_k \simeq \sqrt{\pi/3} \bar{\mu}_k (-1)^k. \quad (7)$$

Подставляя (5), (6), (7) в (4), имеем

$$\bar{A}_k \simeq \frac{8a}{\sqrt{3\pi}} \tilde{\mu}_k^{-1/2} (-1)^k. \quad (8)$$

Используя все эти результаты, получим основное выражение для плотности тока

$$j(x) \simeq \tilde{j}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}_k \exp(-\varepsilon x \tilde{\mu}_k^2) \tilde{Y}'_k(-1) = \frac{8a^2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\mu}_k^{-1/2} \exp(-\varepsilon x \tilde{\mu}_k^2). \quad (9)$$

Встает вопрос, насколько хорошим приближением для величины $j(x)$ является $\tilde{j}(x)$. В силу асимптотического характера приближений члены с большими номерами в обоих рядах должны совпадать. В принципе только эти члены и важны для выделения расходящейся части тока. Однако сравнение \bar{A}_k , $\bar{\mu}_k$, рассчитанных по формулам (8) и (3), с результатами машинного расчета⁽²⁾ показывает, что наше приближение работает уже при $k=0$. Это дает основание предположить, что выражение (9) является хорошим приближением для плотности тока.

Чтобы исследовать поведение $\tilde{j}(x)$ при малых x , применим к ряду (9) формулу суммирования Пуассона⁽⁴⁾:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} f(4k + 5/3) &= 1/4 \int_0^{\infty} f(t) dt + 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{5\pi n}{6} \int_0^{\infty} f(t) \cos \frac{\pi n t}{2} dt + \\ &+ 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{5\pi n}{6} \int_0^{\infty} f(t) \sin \frac{\pi n t}{2} dt. \end{aligned}$$

Нас интересует случай

$$f(t) = \frac{8a^2}{3} e^{z t^2} t^{-1/2}, \quad z^{\text{обозн}} = \varepsilon x.$$

Проведя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \tilde{j}(z) &= \frac{8a^2}{3} \left[1/8 \frac{\Gamma(1/3)}{z^{1/3}} + \frac{\Gamma(1/3)}{4z^{1/3}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{5\pi n}{6} \Phi\left(\frac{1}{3}, -1/2, -\frac{\pi^2 n^2}{16z}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{\pi \Gamma(5/6)}{8z^{1/6}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{5\pi n}{6} \Phi\left(\frac{5}{6}, 3/2, -\frac{\pi^2 n^2}{16z}\right) \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Для дальнейшего упрощения используем асимптотическое представление

$$\Phi(a, c, -x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-x)^{-a} \sum_{k=0}^N \frac{(a+1-c)_k (a)_k}{k! (-x)^k} + O(|x|^{-a-N-1}).$$

Подставляя это представление в (10), получим асимптотический ряд для $\tilde{j}(z)$

$$\begin{aligned} \tilde{j}(z) &= \frac{a^2 \Gamma(1/3)}{3z^{1/3}} + \frac{8a^2}{3} [\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots] = \\ &= j_L(z) + \frac{8a^2}{3} [\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots], \quad (11) \end{aligned}$$

$$\alpha_0 \simeq -0,06, \quad \alpha_1 \simeq -0,013, \quad \alpha_2 \simeq -0,012.$$

Первый член в этой формуле, который мы обозначили $j_L(z)$, выделяет расходящуюся при $z = 0$ часть тока. Он совпадает с током, полученным методом диффузионного пограничного слоя⁽⁴⁾. Сравнивая $j_L(z)$ и $j(z)$ в форме (9), мы можем определить границы применимости приближения пограничного слоя. Было проведено численное сравнение. Оно показало, что приближение диффузионного пограничного слоя хорошо работает при $\epsilon x < 0,1$ (ошибка $< 10\%$).

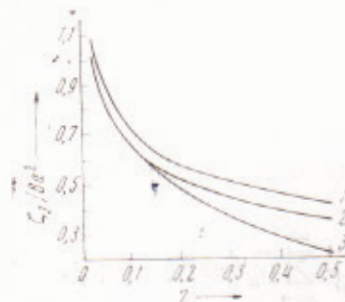


Рис. 1

В этой области переносится на стенку около $1/2$ входящего тока и толщина диффузионного пограничного слоя, определяемая как в (4), достигает 0,7. Результаты численного сравнения приведены на рис. 1. Кривые 1, 2, 3 изображают соответственно зависимости $3j_L/8a^2$, $3j_L/8a^2 - 0,06$, $3j/8a^2$ от z . Непосредственно видно, что приближение диффузионного пограничного слоя, исправленное с учетом первого члена асимптотического ряда (11), хорошо работает вплоть до $z = 0,2$. При $z = 0,2$ толщина диффузионного пограничного слоя равна 0,85 и на электрод переносится $1/2$ входящего тока.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность В. А. Онищуку и Ю. А. Чизмадзе за обсуждение и советы.

Поступило
14 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Г. Левич, Физико-химическая гидродинамика М., 1952. ² Б. С. Петухов, Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах, 1967. ³ А. Эрдейи, Асимптотические разложения, М., 1962. ⁴ С. Бохнер, Лекции об интегралах Фурье, 1962.