Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 519

МАТЕМАТИКА

В. М. МАКСИМОВ

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НУЛЬМЕРНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 V 1970)

Основной принцип сходимости композиций неодинаковых распределений $\{\mu_m\}$ на компактной группе G со счетной базой утверждает, что предельные точки произведений $\mu_1 \ldots \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$ отличаются сдвигами справа на элементы G [1]. Другими словами, существуют элементы α_n из G такие, что меры $\mu_1 \ldots \mu_n\alpha_n$ сходятся при $n \to \infty$. Можно несколько усилить это предложение, выбрав α_n с некоторым запасом, таким, чтобы для любых i последовательность $\mu_i\mu_{i+1} \ldots \mu_n\alpha_n$ сходилась при $n \to \infty$. Элемент α_n зависит не только от меры μ_n, но и от всей последовательности $\{\mu_m\}$. Спрашивается, можно ли α_n выбрать зависимыми лишь от меры μ_n.

Определение. Множество мер A на компактной группе G назовем **полным**, если для любых распределений $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$, (меры x_i могут совпадать) композиция $x_1x_2 \ldots x_n$ сходится при $n \to \infty$.

Из определения следует, что для любого $x \in A$, степень x^n сходится. Отсюда вытекает существование классов A, например, состоящих из степеней меры x, для которой x^n сходится.

Пусть теперь μ — произвольная мера на G. Составим сдвиги меры $\{\mu c\}$, где c пробегает все элементы G. Эту совокупность сдвигов мы будем называть классом сдвигов меры μ. Очевидно, классы сдвигов либо не пересекаются, либо совпадают.

Возьмем по одному представителю из каждого класса сдвигов и образуем из них множество A. Можно ли представители выбрать так, чтобы множество A было полным? Если это возможно на некоторой группе G, то проблема сходимости композиций неодинаковых мер на G полностью решается. Действительно, если из класса сдвигов, содержащих меру μ, выбран один представитель, то обозначим его $\mu c(\mu)$, где $c(\mu) \in G$ и определяется классом сдвигов, содержащих меру μ. Тогда для последовательности $\{\mu_n\}$ положим $\alpha_1 = c(\mu_1)$, $\alpha_2 = c(\alpha_1^{-1}\mu_2)$, $\ldots$, $\alpha_{n+1} = c(\alpha_n^{-1}\mu_{n+1})$. В силу полноты A, произведение $\mu_1' \ldots \mu_n' = \mu_1 \ldots \mu_n\alpha_n$, где $\mu_i' = \alpha_{i-1}^{-1}\mu_i\alpha_i$, сходится при $n \to \infty$. Т. е. полнота A является более сильным свойством мер на группе G, нежели принцип сходимости, и гарантирует существование α_n, зависящих лишь от одной меры μ_n.

Далее, существование принципа сходимости для всех мер на G эквивалентно компактности G [1]. В нашей заметке мы дадим вероятностную характеристику нульмерных компактных групп. Теорема 3 показывает, что если G является положительномерной компактной группой, то сделать множество A полным нельзя ни при каком выборе представителей из класса сдвигов. Наоборот, если G нульмерна, то это уже можно сделать (теорема 2).

Пусть B — произвольное полное множество мер. Следующие несколько утверждений относительно B вытекают из определения полноты.

Лемма 1. *Если B полно, то полугруппа мер, порождаемая B, тоже полна.*

Лемма 2. *Если B полно, то и замыкание B в слабой топологии мер тоже полно.*

Лемма 3. *Если B полно, то и $d^{-1}Bd$ полно для любого d из G.*

Из леммы 1 и 2 следует

Теорема 1. *Если множество мер B на компактной группе G полно, то полна и наименьшая замкнутая полугруппа, содержащая множество B.*

Теорема 2. *Если компактная группа G нульмерна, то можно составить полное множество распределений A из представителей каждого класса сдвигов мер на G.*

Доказательство. Пусть вначале группа G конечная, состоящая из s элементов, и μ — некоторая мера на ней. Тогда найдется элемент e, имеющий вероятность в мере μ не меньшую чем $1/s$. Возьмем из класса сдвигов, содержащего меру μ, распределение $\hat{\mu} = \mu e_i^{-1}$. Совокупность $\{\hat{\mu}\}$ по всем возможным классам образует полное множество. Действительно, для любой последовательности $\{\hat{\mu}_i\}$ из этого множества, вероятность единицы G в каждой мере не меньше $1/s$. Поэтому в силу ([2]) произведение $\hat{\mu}_1 \ldots \hat{\mu}_n$ при $n \to \infty$ сходится, т. е. теорема доказана для конечных групп.

Пусть теперь G — произвольная нульмерная компактная группа с бесконечным числом элементов. Тогда согласно ([3]) группа G представляется сходящимся рядом конечных групп $G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, \infty$, т. е. заданы гомоморфизмы φ_i группы G_{i+1} на G_i и группа G при этом оказывается изоморфной G_ω — группе последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с покомпонентным умножением, где $x_i \in G_i$ и $x_i = \varphi_i\varphi_{i+1} \ldots \varphi_{j-1}(x_j)$.

Базис окрестностей G_ω состоит из множеств вида $[U_\alpha]$, где U_α — окрестность в G_α, а $[U_\alpha]$ — совокупность последовательностей, в которых координаты с номером α принадлежат U_α. Число элементов G_i обозначим $s_i = |G_i|$. Тогда $s_i \leqslant s_{i+1}$. Поскольку G бесконечно, то и G_ω бесконечно, и поэтому $s_i \to \infty$.

В силу изоморфизма G_ω и G, теорему 2 достаточно доказать для группы G_ω. Пусть μ — мера на G_ω. Если $b_\alpha \in G_\alpha$, то мера $\mu_\alpha(b_\alpha) = \mu[b_\alpha]$ определяет меру на G_α и называется проекцией μ на G_α.

Определим элемент $b = (b_1, b_2, \ldots)$ из G_ω так, чтобы вероятность $b_\alpha \in G_\alpha$ в проекции μ_α меры μ была бы не меньше чем $1/s_\alpha$. За b_1 примем элемент G_1, имеющий наибольшую вероятность в μ_1. Поскольку $|G_1| = s_1$, то $\mu_1\{b_1\} \geqslant 1/s_1$.

Допустим, что уже определены первые k элементов $b_1, b_2, \ldots, b_k$, для которых $\mu_i(b_i) \geqslant 1/s_i$, $\varphi_i(b_{i+1}) = b_i$. Определим элемент b_{k+1}. Для этого рассмотрим полный прообраз элемента b_k при гомоморфизме φ_k. Обозначим его B_k. B_k содержит $s_{k+1}/s_k = r_k$ элементов. По построению проекций μ имеем: $\mu_{k+1}\{[B_k]\} = \mu_k(b_k) \geqslant 1/s_k$. Следовательно, в B_k найдется элемент b_{k+1}, для которого $\mu_{k+1}(b_{k+1}) \geqslant 1/s_k r_k = 1/s_{k+1}$. Таким образом, требуемый элемент $b = (b_1, b_2, \ldots)$ существует.

Обозначим $b^{-1} = (b_1^{-1}, b_2^{-1}, \ldots)$ через $c(\mu)$ и из класса сдвигов, содержащего меру μ, выберем представитель, равный $\mu c(\mu)$. Возьмем теперь по одной произвольной мере μ из каждого класса сдвигов и образуем A, состоящее из совокупности мер $\{\mu c(\mu)\}$. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что множество мер A полно.

Пусть $\{\mu_m c(\mu_m)\}$ — произвольная последовательность мер из A. Для того чтобы $\Pi\mu_m c(\mu_m)$ сходилось, достаточно сходимости произведений коэффициентов Фурье этих мер при любых конечномерных представлениях φ группы G. Но эта сходимость будет следовать из сходимости произведения мер $\Pi\mu_m(g)$, где $\mu_m(g)$ — меры на группе $g = \varphi(G_\omega)$, индуцированные мерами $\mu_m c(\mu_m)$ при отображении φ.

Пусть N — ядро представления φ. Фактор-группа $g = G/N$ конечна, ибо тогда группа G_ω не была бы нульмерной. Поэтому, если вероятности единицы в мерах $\mu_m c(\mu_m)$ ограничены равномерно снизу некоторым положительным числом ε, то в силу ([2]) произведение мер $\Pi\mu_m(g)$ сходится. Но вероятность единицы в мере $\mu_m(g)$, очевидно, равна вероятности подгруппы N в мере $\mu_m c(\mu_m)$.

Можно показать, что группа N содержит множество $[e_n]$ при некотором n, где e_n — единица G_n. Вероятность $[e_n]$ в мере $\mu_m c(\mu_m)$ по определению проекции мер равна вероятности единицы в проекции $\mu_m c(\mu_m)$ на G_n. Но эта вероятность, в силу $c(\mu) = (b_1^{-1}, b_2^{-1}, \ldots)$, равна вероятности множества $[b_n]$ в μ_m и которая по построению не меньше $1/s_n$. Но $[e_n] \subseteq N$. Поэтому вероятность подгруппы N в $\mu_m c(\mu_m)$ не меньше $1/s_n$ для всех $m = 1, 2, \ldots, \infty$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для распределений на компактной группе G положительной размерности составить полное множество распределений из представителей каждого класса сдвигов нельзя.*

Докажем сначала два вспомогательных предложения.

Лемма 4. *Существует последовательность мер на окружности $\mu_1, \mu_2, \ldots$ такая, что никакие представители классов сдвигов, содержащих меры $\mu_1, \mu_2, \ldots$, не образуют полного множества.*

Доказательство. Пусть μ_n — распределение на окружности, в котором с вероятностью $1/2$ принимается элемент $\exp\{i2\pi / f(n)\}$ и с вероятностью $1/2$ принимается единица группы. Если $f(n)$ удовлетворяет условиям: $f(n)$ — четные целые положительные числа, $\sum \frac{1}{f(n)} = \infty$, $\sum \frac{1}{f(n)^2} < \infty$, то меры μ_n удовлетворяют условию леммы. Доказательство этого основано на том, что представитель класса сдвигов, содержащего меру μ_n, должен быть вида $\exp\left\{i \frac{2\pi}{f(n)} m(n)\right\} \mu_n$, где $m(n)$ — целое положительное число, не превосходящее $f(n)$. В противном случае степень этого представителя не сходилась бы, что нарушило бы полноту множества представителей.

Лемма 5. *Пусть g — коммутативная подгруппа G и A — полное множество мер, составленное из представителей всех классов сдвигов. Тогда для любой счетной последовательности мер $\mu_1, \mu_2, \ldots$ с носителями из g найдутся элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, принадлежащие g, и элемент d из G такие, что меры $d^{-1}(\mu_1\alpha_1)d, d^{-1}(\mu_2\alpha_2)d, \ldots$ принадлежат A.*

Доказательство. Для простоты сначала рассмотрим случай двух мер μ_1 и μ_2. Построим из этих мер последовательность распределений $\mu_1 b_1$, $b_1^{-1}\mu_2 b_2, \ldots, b_{2n-1}^{-1}\mu_2 b_{2n}, \ldots$, где b_n и b_{n+1} связаны соотношениями $b_{2n} = c(b_{2n-1}^{-1}\mu_2)$ и $b_{2n-1} = c(b_{2(n-1)}^{-1}\mu_1)$.

Функция $c(\cdot)$ определена на G так, что мера $\mu c(\mu)$ является представителем класса сдвигов, содержащего меру μ. Поэтому произведения первых $2n-1$ и $2n$ членов этой последовательности, равных соответственно $(\mu_1\mu_2)^{n-1}\mu_1 b_{2n-1}$ и $(\mu_1\mu_2)^n b_{2n}$, имеют при $n \to \infty$ одинаковые пределы.

В силу принципа сходимости, степени $(\mu_1\mu_2)^n$ будут сходиться в инвариантной мере на группе g_1, $g_1 \subseteq g$, если их сдвинуть на соответствующие элементы α_n, $\alpha_n \in g$. Так как $(\mu_1\mu_2)^n \alpha_n \alpha_n^{-1} b_{2n}$ сходится, то $\alpha_n^{-1} b_{2n}$ должен быть равным $g_1^{(n)} d_n^{(1)}$, где $g_1^{(n)} \in g_1 \subseteq g$, а элемент $d_n^{(1)}$ стремится к некоторому $d \in G$. Аналогично, $(\mu_1\mu_2)^{n-1} \mu_1 b_{2n-1} = \mu_1(\mu_1\mu_2)^{n-1}\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}^{-1} b_{2n-1}$ (в силу коммутативности g) сходится к тому же пределу, что и $(\mu_1\mu_2)^n b_{2n}$. Поскольку носитель μ_1 включается в g, а g коммутативна, получаем $b_{2n-1} = g_2^{(n)} d_n^{(2)}$, где $g_2^{(n)} \in g$, а $d_2^{(n)}$ стремится к $d \in G$.

Учитывая теперь вид элементов b_{2n-1} и b_{2n} и компактность группы G, можно найти номера n_i такие, что $g_1^{(n_i)} \to q_1$, $g_2^{(n_i)} \to q_2$, $g_1^{(n_i-1)} \to q_1'$, $g_2^{(n_i-1)} \to q_2'$. Ясно, что все эти пределы принадлежат g. Тогда $b_{2n_i-1}^{-1}\mu_2 b_{2n_i} \to d^{-1}q_2^{-1}\mu_2 q_1 d$, которое в силу коммутативности g можно записать в виде $d^{-1}\mu_2(q_1 q_2^{-1})d$. Аналогично, $b_{2(n_i-1)}^{-1}\mu_1 b_{2n_i-1} \to d^{-1}(q_2')^{-1}\mu_1(q_1')d = d^{-1}\mu_1(q_2')^{-1} \times q_1' d$. Обозначим $q_1 q_2^{-1} = \alpha_1 \in g$, $q_1'(q_2')^{-1} = \alpha_2 \in g$. В силу теоремы 1, предельные меры $d^{-1}(\mu_1\alpha_1)d$ и $d^{-1}(\mu_2\alpha_2)d$ принадлежат A. Т. е. лемма 5 для двух произвольных мер μ_1 и μ_2 доказана.

Случай большего конечного числа мер $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ с носителями, принадлежащими g, очевидно, рассматривается аналогично.

Таким образом, для любых первых мер $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ последовательности $\{\mu_m\}$ найдутся элементы $\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)} \in g$ и $d_n \in G$ такие, что меры $d_n^{-1}(\mu_i\alpha_i^{(n)})\, d_n$ принадлежат A для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть теперь для последовательности $\{d_n\}$ элемент d из G будет предельным. Тогда для пары $\{d_n, \alpha^{(n)}\}$ существует предельная точка $\{d, \alpha_i\}$, где $\alpha_i \in g$.

Так как мера $d_n^{-1}(\mu_i\alpha_i^{(n)})d_n \in A$, то в силу теоремы 1 мера $d^{-1}(\mu_i\alpha_i)d$ также принадлежит A. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 3.

Пусть группа G ненулевой размерности. Тогда существует линейное представление φ группы G с ядром N такое, что G/N — группа Ли.

Пусть $\varphi(\mu)$ — мера на G/N, порожденная мерой μ при отображении φ. Предположим, что теорема 3 для группы G не выполнена, т. е. существует полное множество A из представителей каждого класса сдвигов на G. Но из полноты A следует полнота $\varphi(A)$, также состоящего из представителей всех классов, но уже на группе G/N. Таким образом, существует группа Ли $G_0 = G/N$, для которой теорема 3 не имеет места. В каждой группе Ли есть подгруппа, являющаяся окружностью. Обозначим одну из таких подгрупп G_0 через g. На g рассмотрим меры $\mu_1, \mu_2, \ldots$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Согласно лемме 5, существуют элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \in g$ и $d \in G_0$, такие, что меры $d^{-1}(\mu\alpha_i)d$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$, принадлежат A. Совокупность мер $d^{-1}(\mu\alpha_i)d$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$, должна быть полной как подмножество полного множества A. Но тогда в силу леммы 3, последовательность $\{\mu_i\alpha_i\}$ полна на окружности g, что противоречит лемме 4. Теорема доказана.

Институт химической физики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
2 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Сазонов, В. Н. Тутубалин, Теория вероятн. и ее примен., 11, в. 1 (1966). [2] В. М. Максимов, Теория вероятн. и ее примен., **13**, в. 2 (1968). [3] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., 1954.