Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 1

УДК 517.946 — *МАТЕМАТИКА*

К. А. КАСЫМОВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 9 IV 1970)

1. Рассмотрим задачу Коши для гиперболических уравнений вида:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = A(t, x, u)\frac{\partial u}{\partial t} + B(t, x, u), \tag{1}$$

$$u(t, x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Предположим, что в полосе $(t \geqslant 0, -\infty < x < +\infty)$ для всех u

$$A(t, x, u) \geqslant \gamma > 0. \tag{3}$$

В настоящей работе доказывается, что решение u задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ будет стремиться к решению вырожденного уравнения

$$0 = A(t, x, u_0)\frac{\partial u_0}{\partial t} + B(t, x, u_0), \tag{4}$$

но, однако, решение уравнения (4) не удовлетворяет прежнему начальному условию (2), а удовлетворяет совершенно другому условию:

$$u_0(t, x)_{t=0} = \varphi(x) + \Delta(x), \tag{5}$$

где функцию $\Delta(x)$ назовем начальным скачком функции u и он однозначно определяется из следующего уравнения:

$$\psi(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\varphi(x)+\Delta(x)} A(0, x, u)\,du. \tag{6}$$

Теперь перейдем к вопросу о построении асимптотики по малому параметру ε решения задачи (1), (2).

2. Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде разложения по целым степеням малого параметра ε

$$u(t, x, \varepsilon) = u_0(t, x) = \varepsilon u_1(t, x) + \ldots + w_0(\tau, x) + \varepsilon w_1(\tau, x) + \ldots, \tag{7}$$

где $\tau = t/\varepsilon$. Подставляя разложение (7) в уравнение (1), получим:

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2 w_0(\tau, x)}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 w_1(\tau, x)}{\partial x^2} + \cdots\right) -$$
$$- \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial t^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial t^2} + \cdots\right) - \left(\frac{\partial^2 w_0(\tau, x)}{\partial \tau^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 w_1(\tau, x)}{\partial \tau^2} + \cdots\right) =$$
$$= \Big[A(\varepsilon\tau, x, u_0(\varepsilon\tau, x) + \varepsilon u_1(\varepsilon\tau, x) + \cdots + w_0(\tau, x) + \varepsilon w_1(\tau, x) + \cdots)\frac{\partial}{\partial\tau}(u_0(\varepsilon\tau, x) +$$
$$+ \varepsilon u_1(\varepsilon\tau, x) + \cdots + w_0(\tau, x) + \varepsilon w_1(\tau, x) + \cdots) - A(\varepsilon\tau, x, u_0(\varepsilon\tau, x) +$$
$$+ \varepsilon u_1(\varepsilon\tau, x) + \cdots)\frac{\partial}{\partial\tau}(u_0(\varepsilon\tau, x) + \varepsilon u_1(\varepsilon\tau, x) + \cdots)\Big] + \varepsilon A(t, x, u_0(t, x) +$$

$$+\varepsilon u_1(t,x)+\cdots)\frac{\partial}{\partial t}(u_0(t,x)+\varepsilon u_1(t,x)+\cdots)+\varepsilon\,[B(\varepsilon\tau,x,u_0(\varepsilon\tau,x)+$$
$$+\varepsilon u_1(\varepsilon\tau,x)+\cdots+w_0(\tau,x)+\varepsilon w_1(\tau,x)+\cdots)-B(\varepsilon\tau,x,u_0(\varepsilon\tau,x)+$$
$$+\varepsilon u_1(\varepsilon\tau,x)+\cdots)]+\varepsilon B(t,x,u_0(t,x)+\varepsilon u_1(t,x)+\cdots)\equiv$$
$$\equiv\Big[A(\varepsilon\tau,x,\alpha_0(\tau,x)+w_0(\tau,x)+\varepsilon(\alpha_1(\tau,x)+w_1(\tau,x))+\cdots)\frac{\partial}{\partial\tau}(\alpha_0(\tau,x)+$$
$$+w_0(\tau,x)+\varepsilon(\alpha_1(\tau,x)+w_1(\tau,x))+\cdots)-A(\varepsilon\tau,x,\alpha_0(\tau,x)+$$
$$+\varepsilon\alpha_1(\tau,x)+\cdots)\frac{\partial}{\partial\tau}(\alpha_0(\tau,x)+\varepsilon\alpha_1(\tau,x)+\cdots)\Big]+\varepsilon A(t,x,u_0(t,x)+$$
$$+\varepsilon u_1(t,x)+\cdots)\frac{\partial}{\partial t}(u_0(t,x)+\varepsilon u_1(t,x)+\cdots)+\varepsilon\,[B(\varepsilon\tau,x,\alpha_0(\tau,x)+$$
$$+w_0(\tau,x)+\varepsilon(\alpha_1(\tau,x)+w_1(\tau,x))+\cdots)-B(\varepsilon\tau,x,\alpha_0(\tau,x)+$$
$$+\varepsilon\alpha_1(\tau,x)+\cdots)]+\varepsilon B(t,x,u_0(t,x)+\varepsilon u_1(t,x)+\cdots), \tag{8}$$

где

$$\alpha_k(\tau,x)=u_k(0,x)+\tau\frac{\partial u_{k-1}(0,x)}{\partial t}+\cdots+\frac{\tau^k}{k!}\frac{\partial^k u_0(0,x)}{\partial t^k},\ \alpha_k(0,x)=u_k(0,x).$$

Из (8) получаем два типа уравнений для определения коэффициентов $u_k(t,x)$ и $w_k(\tau,x)$, $k\geqslant 0$ разложения (7). Для $u_k(t,x)$ имеем следующее уравнение:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\cdots\right)-\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\cdots\right)=$$
$$=A(t,x,u_0+\varepsilon u_1+\cdots)\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t}+\cdots\right)+B(t,x,u_0+\varepsilon u_1+\cdots), \tag{9}$$

а для $w_k(\tau,x)$:

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\cdots\right)-\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial\tau^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 w_1}{\partial\tau^2}+\cdots\right)=\Big[A(\varepsilon\tau,x,\alpha_0+w_0+$$
$$+\varepsilon(\alpha_1+w_1)+\cdots)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}(\alpha_0+w_0)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}(\alpha_1+w_1)+\cdots\right)-$$
$$-A(\varepsilon\tau,x,\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\cdots)\left(\frac{\partial\alpha_0}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial\alpha_1}{\partial\tau}+\cdots\right)\Big]+\varepsilon\,[B(\varepsilon\tau,x,\alpha_0+w_0+$$
$$+\varepsilon(\alpha_1+w_1)+\cdots)-B(\varepsilon\tau,x,\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\cdots)]. \tag{10}$$

Для однозначного определения коэффициентов u_k и w_k разложения (7) зададим начальные условия следующим образом:

$$u_0(t,x)\,|_{t=0}=\varphi(x)+\Delta(x), \tag{11}$$

$$w_0(\tau,x)\,|_{\tau=0}=\varphi(x)-u_0(0,x),\qquad \left.\frac{\partial w_0}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\psi(x), \tag{12'}$$

$$w_k(\tau,x)\,|_{\tau=0}=-u_k(0,x),\qquad \left.\frac{\partial w_k}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=-\frac{\partial u_{k-1}(0,x)}{\partial t}, \tag{12''}$$

а начальные условия для $u_k(t,x)$ $(k>0)$ выберем специальным образом (см. ниже).

Разлагая правые части уравнений (9) и (10) в ряды по степеням ε и затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем последовательность уравнений для $u_k(t,x)$ и $w_k(\tau,x)$:

$$0=A(t,x,u_0)\frac{\partial u_0}{\partial t}+B(t,x,u_0), \tag{13'}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial\tau^2}+A(0,x,u_0)(0,x)+w_0(\tau,x))\frac{\partial w_0}{\partial\tau}=0, \tag{13''}$$

$$A(t,x,u_0)\frac{\partial u_k}{\partial t}+\left[\frac{\partial A(t,x,u_0)}{\partial u}\frac{\partial u_0}{\partial t}+\frac{\partial B(t,x,u_0)}{\partial u}\right]u_k=\Phi_k(t,x), \tag{14'}$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial\tau^2}+\frac{\partial}{\partial\tau}[A(0,x,\alpha_0+w_0)(\alpha_k+w_k)-A(0,x,\alpha_0)\alpha_k]=\Psi_k(\tau,x), \quad (14'')$$

где функции Φ_k и Ψ_k выражаются через $u_i(t,x)$ и $\alpha_i(\tau,x)$, $w_i(\tau,x)$, $i<k$.

Начальные условия для $u_k(t,x)$ $(k>0)$ еще не определены. Найдем их так, чтобы функция $w_k(\tau,x)$ и ее первая производная по τ были функциями типа пограничного слоя ([1]). В связи с этим предполагая, что w_k, $\partial w_k/\partial\tau$ и $\Psi_k(\tau,x)$ — функции типа погранслоя, а $A(t,x,u)$, $\partial A/\partial u$ непрерывны, $|\partial A/\partial u|<c=\text{const}$ при $t\geqslant 0$, $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<u<<+\infty$, интегрируем уравнение (14) по τ от 0 до ∞ и, учитывая $\alpha_k(0,x)=u_k(0,x)$, $\quad u_k(0,x)+w_k(0,x)=0$, $\left.\frac{\partial w_k}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=-\frac{\partial u_{k-1}(0,x)}{\partial t}$, получим начальное условие для $u_k(t,x)$, $k>0$:

$$u_k(t,x)|_{t=0}=\frac{1}{A(0,x,u_0(0,x))}\left(\int_0^\infty \Psi_k(\tau,x)\,d\tau-\frac{\partial u_{k-1}(0,x)}{\partial t}\right). \quad (15)$$

Предположим, что в полосе $t\geqslant 0$, $-\infty<x<+\infty$ для всех u выполнены следующие условия:

а) непрерывны производные вида:

$$\frac{\partial^p A(t,x,u)}{\partial t^{p_0}\partial x^{p_1}\partial u^{p_2}},\quad \frac{\partial^p B(t,x,u)}{\partial t^{p_0}\partial x^{p_1}\partial u^{p_2}}, \quad (16)$$

где $p=p_0+p_1+p_2$, $0\leqslant p\leqslant N+1$, $0\leqslant p_i\leqslant N+1$, $i=0,1,2$;

б) непрерывны:

$$\varphi^{(i)}(x),\quad \psi^{(j)}(x), \quad (17)$$

где $i=0,1,\ldots,N+1$, $j=0,1,\ldots,N$.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Решение $w_0(\tau,x)$ задачи (13), (12) и производные вида $\partial^{m+1}w_0/\partial\tau\partial x^m$ — функции типа пограничного слоя*

$$|w_0(\tau,x)|\leqslant C_0(\tau,x)e^{-\gamma\tau},\quad \left|\frac{\partial^{m+1}w_0}{\partial\tau\,\partial x^m}\right|\leqslant C_1(\tau,x)e^{-\gamma\tau}, \quad (18)$$

где $C_0(\tau,x)$ и $C_1(\tau,x)$ многочлены по τ с ограниченными коэффициентами, зависящими от x, $0\leqslant m\leqslant N+1$.

Доказательство. Обозначим $\partial w_0/\partial\tau$ через $v_0(\tau,x)$. Тогда из (13''), (12') имеем $v_0=\psi(x)\exp\left(-\int_0^\tau A(0,x,u_0(0,x)+w_0)\right)ds$. Отсюда, имея в виду (3), получаем оценку (18) для $v_0(\tau,x)$, а $w_0(\tau,x)=\varphi(x)-u_0(0,x)+\int_0^\tau v_0(s,x)\,ds$ и, следовательно, при $\tau\to\infty$ получим $w_0(\infty,x)=\varphi(x)-u_0(0,x)+\int_0^\infty v_0(s,x)\,ds$, где $\int_0^\infty v_0(s,x)\,ds$, в силу оценки (18) для $v_0(\tau,x)$, сходится. Интегрируя теперь уравнение (13'') и переходя к пределу при $\tau\to\infty$, получим

$$\psi(x)=\int_{\varphi(x)}^{u_0(0,x)+w_0(\infty,x)} A(0,x,\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, учитывая (6) и выражение для $w_0(\infty,x)$, получим $\Delta(x)=\int_0^\infty v_0(s,x)\,ds$. Тогда из выражения $w_0(\tau,x)=-\int_\tau^\infty v_0(s,x)\,ds$ непосредственно следует оценка (18) для $w_0(\tau, x)$. С помощью дифференцирования уравнения (13'') и методом индукции можно убедиться в справедливости (18) для $\partial^{m+1} w_0(\tau, x)/\partial\tau\,\partial x^m$, $1 \leqslant m \leqslant N+1$.

Лемма 2. *Решение $w_k(\tau, x)$ задачи (14''), (12'') и его производные вида $\partial^{m+1} w_k / \partial\tau\,\partial x^m$, $1 \leqslant k \leqslant N+1$, $0 \leqslant m \leqslant N+1-k$ — функции типа погранслоя.*

Лемма 2 доказывается методом математической индукции.

Теорема. *Если выполнены условия* (3), (16), (17) *и при* $-\infty < u < +\infty$ $\partial A / \partial u$, $\partial B / \partial u$, $\partial^2 B / \partial u^2$ *ограничены в* Q *(характеристический треугольник уравнения* (1)), *то в* Q *существует* ([2, 3]) *единственное решение задачи* (1), (2) *и оно допускает следующее асимптотическое разложение:*

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k(t, x) + \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k w_k\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + R_N(t, x, \varepsilon), \tag{19}$$

где $u_0(t, x)$ — *решение уравнения* (4) *с начальным условием* (5), $u_k(t, x)$ — *решение задачи* (14'), (15); $w_k(t/\varepsilon, x)$ — *функции типа погранслоя, построенные с помощью задач* (13''), (12') *и* (14''), (12''). *Для* R_N *всюду в* Q *имеет место оценка*

$$\|R_N\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon^{N+1}). \tag{20}$$

Замечание. Исследование проходит и для случая $u(t, x_1, \ldots, x_n)$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность чл.-корр. АН СССР Л. А. Люстернику за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт математики и механики
Академии наук КазССР
Алма-Ата

Поступило
3 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 12, в. 5 (77) (1957). [2] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1952. [3] С. Христианович, Матем. сборн., 2, в. 5 (1937).