Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 2

УДК 513

МАТЕМАТИКА

П. С. СОЛТАН

ОСВЕЩЕНИЕ ИЗНУТРИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 III 1970)

Пусть K — выпуклое тело n-мерного эвклидова пространства E^n; $\mathrm{bd}K$ — его граница и $\mathrm{int}\,K$ — его внутренность. Точку $y \in \mathrm{bd}\,K$ назовем освещаемой изнутри точкой $x \in \mathrm{bd}\,K$, если $x \neq y$ и интервал (x, y) содержится в $\mathrm{int}\,K$. Множество $N \subset \mathrm{bd}\,K$ назовем освещаемым изнутри множеством $M \subset \mathrm{bd}\,K$, если любая точка $y \in N$ освещаема изнутри некоторой точкой $x \in M$. Мы будем предполагать всюду, что $\mathrm{bd}\,K \neq \phi$.

Теорема 1. *Граница $\mathrm{bd}\,K$ выпуклого неограниченного тела $K \subset E^n$ в том и только в том случае освещаема изнутри, если K не является конусом.*

Доказательство. Если K — конус с вершиной a, то, очевидно, точка a не освещается изнутри никакой точкой $x \in \mathrm{bd}\,K$.

Обратно, если граница $\mathrm{bd}\,K$ тела K неосвещаема изнутри, то найдется точка $z \in \mathrm{bd}\,K$, не освещаемая изнутри никакой точкой $x \in \mathrm{bd}\,K$. Пусть $y \in \mathrm{int}\,K$. Если бы луч zy не принадлежал целиком телу K, то на этом луче нашлась бы такая точка $x \in \mathrm{bd}\,K$, что $y \in (x, z)$. Но это означало бы, что точка z освещается изнутри точкой $x \in \mathrm{bd}\,K$, а это противоречит предположению. Таким образом, луч zy содержится в теле K. Следовательно, $\{z\} \cup \mathrm{int}\,K$ есть конус, а потому, переходя к замыканию, мы находим, что K — конус (с вершиной в точке z).

Теорема 1 решает вопрос, при каком условии вся граница $\mathrm{bd}\,K$ тела K освещаема изнутри некоторым множеством $M \subset \mathrm{bd}\,K$. Наименьшую мощность освещающего множества M будем обозначать через $p(K)$. Известно ([3], [5]), что для любого ограниченного выпуклого тела $K \subset E^n$ справедливы неравенства: $2 \leqslant p(K) \leqslant n+1$. Далее ([5]), для любого натурального p, удовлетворяющего неравенствам $2 \leqslant p \leqslant n+1$, существует такое ограниченное выпуклое тело $K \subset E^n$, что $p(K) = p$, причем равенство $p(K) = n+1$ выполняется только для n-мерного симплекса. В этой заметке указанные результаты распространяются на случай неограниченных выпуклых тел.

Точку $x \in \mathrm{bd}\,K$ будем называть правильной, если, во-первых, через x проходит единственная опорная гиперплоскость Γ_x тела K и, во-вторых, точка x является внутренней точкой выпуклого множества $\Gamma_x \cap \mathrm{bd}\,K$ (относительно несущей плоскости этого множества). Если x — правильная точка, то замкнутое выпуклое множество $F_x = \Gamma_x \cap \mathrm{bd}\,K$ мы будем называть правильной гранью.

Лемма 1. *Если x — правильная точка и y — внутренняя точка соответствующей правильной грани F_x (относительно ее несущей плоскости), то y — тоже правильная точка и $F_y = F_x$.*

Лемма 2. *Множество M всех правильных точек плотно в границе тела K, т. е. $\overline{M} = \mathrm{bd}K$.*

По поводу доказательства этих лемм см. ([2]), стр. 110, и ([1]), стр. 24.

Лемма 3. *Неограниченное выпуклое тело $K \subset E^n$ в том и только в том случае является конусом, если для любых n правильных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствующие правильные грани $F_{x_1}, F_{x_2}, \ldots, F_{x_n}$ имеют непустое пересечение.*

В доказательстве нуждается только достаточность этого условия.

Прежде всего устанавливается, что если пересечение любых n правильных граней непусто, то и пересечение всех правильных граней непусто (для этого рассматриваются всевозможные пересечения правильных граней с одной из плоскостей Γ_x, и к этим пересечениям применяется теорема Хелли ([3])). Далее показывается (с использованием леммы 2), что если a — общая точка всех правильных граней, то $\mathrm{bd}K$ есть конус с вершиной a. Отсюда уже без труда следует, что K — выпуклый конус с вершиной a.

Теорема 2. *Для любого неограниченного отличного от конуса выпуклого тела $K \subset E^n$ справедливы неравенства $2 \leqslant p(K) \leqslant n$.*

Доказательство. Так как тело K отлично от конуса, то, в силу леммы 3, найдутся такие n правильных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{bd}K$, что соответствующие правильные грани $F_{x_1}, F_{x_2}, \ldots, F_{x_n}$ имеют пустое пересечение. Если точка $x \in \mathrm{bd}\, K$ не освещается изнутри какой-либо точкой x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то весь отрезок $[x_i, x]$ лежит на границе тела K и, значит, в гиперплоскости Γ_{x_i}. В частности, $x \in \Gamma_{x_i}$. Так как, кроме того, $x \in \mathrm{bd}K$, то $x \in \Gamma_{x_i} \cap \mathrm{bd}K = F_{x_i}$. Итак, если точка $x \in \mathrm{bd}K$ не освещается изнутри точкой x_i, то $x \in F_{x_i}$, а следовательно, x принадлежит пересечению граней $F_{x_1}, F_{x_2}, \ldots, F_{x_n}$. Но поскольку множества $F_{x_1}, F_{x_2}, \ldots, F_{x_n}$ имеют пустое пересечение, то отсюда следует, что любая точка $x \in \mathrm{bd}K$ освещается хотя бы одной из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Следовательно, $p(K) \leqslant n$.

Неравенство $2 \leqslant p(K)$ очевидно, ибо одной точкой $x \in \mathrm{bd}K$ нельзя осветить изнутри всю границу $\mathrm{bd}K$ тела K (останется не освещенной изнутри сама точка x). Это и завершает доказательство теоремы 2.

Теорема 3. *Для любого целого числа p, удовлетворяющего неравенствам $2 \leqslant p \leqslant n$, существует такое неограниченное выпуклое тело $K \subset E^n$, что $p(K) = p$.*

Доказательство теоремы 3 проводится теми же методами, что и для ограниченных выпуклых тел (см. ([5])), но только вместо шаров рассматриваются цилиндры. Именно, если L — выпуклое множество с несущей гиперплоскостью $\Gamma \subset E^n$ и если $a \notin \Gamma$, то, как нетрудно доказать, для конуса aL с основанием L и вершиной a справедливо соотношение $p(aL) = p(L) + 1$. Поэтому если C — такое выпуклое тело размерности $n - p + 2$, для которого $p(C) = 2$, то, образуя $p - 2$ раза конус над этим телом, мы придем к n-мерному телу K, удовлетворяющему соотношению $p(K) = p$ (здесь p может принимать значения $2, 3, \ldots, n$). В заметке ([5]) в качестве C использовался $(n - p + 2)$-мерный шар. Если же в качестве C взять цилиндр, т. е. r-окрестность прямой линии в $(n - p + 2)$-мерном пространстве, то эта конструкция приведет нас к искомому неограниченному телу. Таким образом, теорема 3 доказана.

Заметим, наконец, что неограниченное тело $K \subset E^n$, для которого $p(K)$ принимает свое максимальное возможное значение, уже не является единственным, как это было для случая ограниченного тела. Действительно, если вместо C в доказательстве теоремы 3 рассматривать какой-либо двумерный неограниченный выпуклый многоугольник, у которого имеются две неограниченные параллельные стороны, то тело K, к которому мы придем, как нетрудно проследить по доказательству теоремы 3, будет удовлетворять соотношению $p(K) = n$. Но таких многоугольников C бесконечно много.

Автор пользуется случаем выразить свою признательность проф. В. Г. Болтянскому за внимание к настоящей работе.

Кишиневский государственный университет

Поступило 25 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Буземан, Выпуклые поверхности, 1964. [2] Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, 1959. [3] B. Grünbaum, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 15 (1964). [4] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, Теорема Хелли, М., 1968. [5] П. С. Солтан, Матем. сборн., нов. сер., 57 (99), 4 (1962).