Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 519.217

А. Д. ШАТАШВИЛИ

О ПЛОТНОСТЯХ МЕР, СООТВЕТСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЯМ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 27 II 1970)

Нахождение плотностей мер, соответствующих случайным процессам, является одной из важных задач теории случайных процессов (см. по этому поводу работы ([1–10])), а сами плотности используются при решении многих задач теории случайных процессов: нелинейная экстраполяция и фильтрация, оптимальное управление, задачи математической статистики, вычисления распределения различных функционалов.

В настоящей статье рассматриваются случайные процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ со значениями в m-мерном эвклидовом пространстве E_m, являющиеся решениями дифференциальных уравнений

$$dx_2(t)\,/\,dt + L(t)x_2(t) + f(t,\ x_2(t)) = \xi(t), \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$
$$x_2(0) = \xi(0) = 0; \tag{1}$$
$$dx_1(t)\,/\,dt + L(t)x_1(t) = \xi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$
$$x_1(0) = \xi(0) = 0, \tag{2}$$

где $\xi(t)$ является гауссовским процессом, определенным на отрезке $[0, T]$ со значениями в E_m, с нулевым математическим ожиданием, $\mathrm{M}\xi(t) = 0$, и непрерывной корреляционной матрицей $R(t, s)$ в области $[0, T]\times$ $\times [0, T]$; функция $f(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности обеих переменных в области $[0, T] \times \mathrm{E}_m$, принимает свои значения в E_m и

$$\sum_{j=1}^{m} \left\| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x_j} \right\| < \infty \qquad (t \in [0, T], x \in E_m) \tag{3}$$

(здесь и в дальнейшем символом $\|\cdot\|$ обозначаем норму в E_m, а символом $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в E_m), а $L(t)$ является линейным оператором, непрерывно зависящим от t и действующим в E_m.

Пусть μ_1 и μ_2 — меры, порожденные соответственно решениями дифференциальных уравнений (2) и (1) на минимальной σ-алгебре, которая содержит все цилиндрические множества пространства всех векторных функций, определенных на отрезке $[0, T]$ и принимающих свои значения в эвклидовом пространстве E_m.

В настоящей статье устанавливаются условия, при которых мера μ_2 абсолютно непрерывна относительно меры μ_1, и в явном виде выписывается соответствующая плотность. Заметим, что процесс $x_1'(t)$ является гауссовским, корреляционная матрица $B(t, s)$ которого просто выражается через корреляционную матрицу $R(t, s)$ и через фундаментальную матрицу решений $Y(t)$ однородного уравнения

$$dY(t)\,/\,dt - Y(t)L(t) = 0,\ Y(0) = I \tag{4}$$

(I — единичная матрица);

$$B(t,\ s) = Y(t)R(t,\ s)Y_*(s), \tag{5}$$

где $Y_*(t)$ обозначает матрицу, транспонированную к $Y(s)$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_t$ σ-алгебру, порожденную величинами $\xi(s)$ при $s \leqslant t$, и предположим, что выполнены следующие условия:

1) Существует такая матричная функция $Q(t, s)$, что

$$B(t, s) = \int_0^T Q(t, u) Q(s, u) \, du. \tag{6}$$

2) Существует $\mathfrak{F}_t$-измеримый винеровский процесс $w(t)$ со значениями в E_m, такой что $w(s) - w(t)$ при $s > t$ не зависит от σ-алгербы $\mathfrak{F}_t$ и

$$\xi(t) = Y^*(t) \int_0^T Q(t, u) \, dw(u), \tag{7}$$

где $Y^*(t)$ обозначает матрицу, обратную к матрице $Y(t)$.

3) Существует $\mathfrak{F}_t$-измеримая случайная функция $g(t)$ со значениями в E_m, для которой с вероятностью 1

$$\int_0^T \| g(t) \|^2 \, dt < \infty; \tag{8}$$

$$f\left(t, Y^*(t) \int_0^t Y(s) \xi(s) \, ds\right) = Y^*(t) \int_0^T Q(t, u) g(u) \, du. \tag{9}$$

Теорема. *Пусть в m-мерном эвклидовом пространстве E_m заданы дифференциальные уравнения* (1) *и* (2), *где гауссовский процесс* $\xi(t)$, *функция* $f(t, x)$ *и линейный оператор* $L(t)$ *удовлетворяют сформулированным выше условиям и, кроме того, пусть выполняются условия* 1)—3).

Тогда мера μ_2 абсолютно непрерывна относительно меры μ_1 и

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1}[x_1] = \exp\left\{ -\int_0^T (g(t), dw(t)) - \frac{1}{2} \int_0^T \| g(t) \|^2 \, dt \right\}. \tag{10}$$

Результаты этой теоремы могут быть применены к решениям уравнений порядка выше первого.

Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — случайные процессы со значениями в E_m и удовлетворяют соответственно уравнениям

$$d^n z_2(t)/dt^n + L_1(t)[z_2(t)] + F(t, z_2(t), z_2'(t), \ldots, z_2^{(n-1)}(t)) = \eta(t) \tag{11}$$
$$(0 \leqslant t \leqslant T), \quad z_2(0) = z_2'(0) = \ldots = z_2^{(n-1)}(0) = \eta(0) = 0;$$

$$d^n z_1(t) / dt^n + L_1(t)[z_1(t)] = \eta(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{12}$$
$$z_1(0) = z_1'(0) = \ldots = z_2^{(n-1)}(0) = \eta(0) = 0.$$

Здесь $L_1(t)$ является линейным дифференциальным оператором $(n-1)$-го порядка с коэффициентами, непрерывно зависящими от t и действующими в E_m: если $y(t)$ — m-мерная $n-1$ раз дифференцируемая функция со значениями в E_m, то

$$L_1(t)[y(t)] = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(t) y^{(k)}(t), \tag{13}$$

где $C_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, являются матрицами m-го порядка. Далее, функция $F(t, z_2(t), z_2'(t), \ldots, z_2^{(n-1)}(t))$ определена и непрерывна по совокупности всех переменных в области $[0, T] \times \mathrm{E}_m \times \ldots \times \mathrm{E}_m$, принимает свои значения в E_m и удовлетворяет условию

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m} \left\| \frac{\partial F(t, z_2^{(0)}(t), z_2^{(1)}(t), \ldots, z_2^{(n-1)}(t))}{\partial z_i^{(j)}} \right\| < \infty \tag{14}$$

($z_i^{(j)}$ — i-я компонента вектора $z^{(j)}$), а $\eta(t)$ является гауссовским процессом со значениями в E_m, рассмотренным выше.

Рассматриваемый случай сводится к предыдущему введением процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в пространстве $\mathrm{E}_{mn} = \mathrm{E}_m \times \ldots \times \mathrm{E}_m$, связанных с процессами $z_1(t)$ и $z_2(t)$ следующим образом:

$$x_i(t) = [z_i(t), dz_i(t) / dt, \ldots, d^{(n-1)}z_i(t) / dt^{n-1}]. \tag{15}$$

Процессы $x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ уже удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (1) и (2) в E_{mn}, где функция $f(t, x_2(t))$ определена на $[0, T] \times \mathrm{E}_{mn}$ и принимает свои значения в E_{mn} и имеет вид

$$f(t, x_2(t)) = [0, \ldots, 0, F(t, z_2(t), z_2'(t), \ldots, z_2^{(n-1)}(t))],$$

гауссовский процесс

$$\xi(t) = [0, \ldots, 0, \eta(t)]$$

определен на $[0, T]$ и принимает свои значения в E_{mn}, а линейный оператор $L(t)$ действует в E_{mn} и имеет вид

$$L(t) = \begin{pmatrix} (0), & (I), & \ldots, & (0) \\ (0), & (0), & \ldots, & (0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (0), & (0), & \ldots, & (I) \\ C_0(t), & C_1(t), & \ldots, & C_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Здесь каждый ящик вида (0) является m-мерной матрицей с нулевыми элементами, ящик вида (I) — m-мерная единичная матрица. Если обозначить через μ_{z_1} и μ_{z_2} меры, порожденные соответственно процессами $z_1(t)$ и $z_2(t)$, то при выполнении условий теоремы для уравнений (1) и (2) в E_{mn} мера μ_{z_2} будет абсолютно непрерывна относительно меры μ_{z_1} и $\frac{d\mu_{z_2}}{d\mu_{z_1}}(z_1) = \frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x_1)$, а плотность $\frac{d\mu_2}{d\mu_1}(x_1)$ будет иметь вид (10), где скалярное произведение и норму нужно понимать в пространстве E_{mn}, а случайная функция $g(t)$ и винеровский процесс $w(t)$ принимают свои значения в E_{mn} и определяются соответственно по формулам (9) и (7).

Надо заметить, что результаты настоящей статьи остаются в силе, если предположить, что пространство E_m является сепарабельным гильбертовым пространством E, а уравнения (1), (2), (11), (12) являются дифференциальными уравнениями в гильбертовом пространстве E.

Донецкий вычислительный центр
Академии наук УССР

Поступило
27 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. H. Cameron, W. T. Martin, Trans. Am. Math. Soc., 58, 184 (1945). [2] R. H. Cameron, W. T. Martin, ibid., 66, 253 (1949). [3] И. И. Гихман, А. В. Скороход, УМН, 21, 6, 132, 83 (1966). [4] А. В. Скороход, Теория вероятностей и ее применения, 5, 45 (1960). [5] Ю. А. Розанов, Там же, 9, 448 (1964). [6] Ю. А. Розанов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 108 (1969). [7] Я. Гаек, Чехослов. матем. журн., 8, 610 (1958). [8] J. Feldman, Pacif. J. Math., 10, 699 (1958). [9] А. Д. Шаташвили, Тр. Вычислит. центра АН ГрузССР, 5, 1, 69 (1965). [10] А. Д. Шаташвили, Там же, стр. 43 (1966).