Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 517.94:538.574.4:59.55

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Г. РАММ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТЕНЗОРА ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ И ЕМКОСТИ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

(Представлено академиком В. А. Фоком 4 V 1970)

В п. 1 приводится формула для тензора поляризуемости однородного диэлектрического тела D с постоянной ε_i, помещенного в среду с постоянной ε_e. В п. 2 дана формула для электростатической емкости проводника произвольной формы. В п. 3 рассмотрены приложения.

1. Тензор поляризуемости тела будем обозначать $\alpha_{ij}(\gamma)$, где $\gamma = (\varepsilon_i - \varepsilon_e)/(\varepsilon_i + \varepsilon_e)$. Пусть V — объем тела D. Тогда при внесении его во внешнее электростатическое постоянное поле E это тело приобретает дипольный момент

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}(\gamma) V E_j. \tag{1}$$

Через Γ обозначается поверхность тела D, $N_i(s)$ — компонента внешней к поверхности Γ нормали, проходящей через точку s, $r_{st} = |s - t|$ — расстояние между точками s и t.

Положим

$$\alpha_{ij}^{(n)}(\gamma) = \frac{2}{V} \sum_{m=0}^{n} M_{ij}^{(m)} \frac{(-1)^m}{(2\pi)^m} \frac{\gamma^{n+2} - \gamma^{m+1}}{\gamma - 1}, \tag{2}$$

где

$$M_{ij}^{(0)} = V\delta_{ij}, \quad M_{ij}^{(1)} = \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{N_i(s) N_j(t)}{r_{st}} ds\, dt, \tag{3}$$

$$M_{ij}^{(m)} = \int_\Gamma \int_\Gamma ds\, dt\, N_i(s) N_j(t) \underbrace{\int_\Gamma \ldots \int_\Gamma}_{m-1 \text{ раз}} \frac{1}{r_{s t_{m-1}}} \psi(t_1, t) \psi(t_2, t_1) \ldots$$
$$\ldots \psi(t_{m-1}, t_{m-2})\, dt_1 \ldots dt_{m-1}. \tag{3a}$$

Здесь использовано обозначение

$$\psi(t, s) = \frac{\partial}{\partial N_t} \frac{1}{r_{ts}}. \tag{4}$$

Величина $\alpha_{ij}^{(n)}(\gamma)$ является n-м приближением тензора $\alpha_{ij}(\gamma)$.

Теорема 1. *Имеет место оценка*

$$|\alpha_{ij}^{(n)}(\gamma) - \alpha_{ij}(\gamma)| \leqslant A q^{n+1}, \tag{5}$$

в которой $0 < q < 1$. *Постоянные* A *и* q *определяются только формой поверхности и числом* γ.

Замечание 1. Для сферы $A = 1$, $q = 1/3$.

Замечание 2. При $\varepsilon_i = \infty$, $\gamma = 1$, что соответствует идеальной проводимости тела D, формула (2) примет вид:

$$\alpha_{ij}^{(n)} = \frac{2}{V} \sum_{m=0}^{n} M_{ij}^{(m)} \frac{(-1)^m}{(2\pi)^m} (n + 1 - m). \tag{6}$$

При $\varepsilon_i = 0$, $\gamma = -1$, что соответствует идеальному магнетику, формула (2) примет вид

$$\beta_{ij}^{(n)} = \frac{-1}{V} \sum_{m=0}^{n} M_{ij}^{(m)} \frac{1 + (-1)^{m+n}}{(2\pi)^m}. \tag{7}$$

Магнитный момент тела D в постоянном внешнем поле H вычисляется по формуле

$$M_i = \sum_{j=1}^{3} \beta_{ij} V H_j. \tag{1a}$$

2. Обозначим через C электростатическую емкость проводника D. Введем величину

$$C^{(n)} = 4\pi S^2 \Big/ \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{ds\,dt}{r_{st}} \underbrace{\int_\Gamma \ldots \int_\Gamma}_{n\ \text{раз}} \psi(t, t_n)\,\psi(t_n, t_{n-1}) \ldots \psi(t_2, t_1)\,dt_1 \ldots dt_n. \tag{8}$$

Здесь S — площадь поверхности Γ, а функция $\psi(t, s)$ определена формулой (4). Величину $C^{(n)}$ можно рассматривать как n-е приближение к емкости проводника.

Теорема 2. *Имеет место оценка*

$$|C^{(n)} - C| \leqslant A_1 q^{n+1}, \tag{9}$$

в которой $0 < q < 1$. *Постоянные* A_1, q *определяются только формой поверхности и числом* γ.

Замечание 3. Число q в теоремах 1, 2 одно и то же.

Замечание 4. При $n = 0$ формула (8) принимает особенно простой вид:

$$C^{(0)} = 4\pi S^2 \Big/ \int_\Gamma\int_\Gamma \frac{ds\,dt}{r_{st}}. \tag{10}$$

Формула (10) по существу является аналитической записью известного эмпирического рецепта Хоу вычисления емкости.

Доказательства теорем 1, 2 основаны на методах, развитых в работах [1].

3. а) Характеристика рассеяния на малом теле D в предположении, что магнитным дипольным излучением можно пренебречь, имеет вид

$$f = b\,[\nu\,[P, \nu]], \quad b = k_0^2/4\pi\varepsilon_0. \tag{11}$$

Здесь ε_0 — диэлектрическая постоянная среды, k_0 — волновое число, ν — орт, направленный на точку наблюдения, P — дипольный момент малого тела в постоянном электростатическом поле E, которое совпадает с значением электрического вектора падающего электромагнитного поля в точке нахождения малого тела. Заметим, что если размеры тела малы по сравнению с длиной волны падающего поля, то положение тела можно характеризовать координатами одной точки.

Задача, которая нас интересует, состоит в следующем. Можно ли вычислить вектор первичного поля E в точке нахождения малого тела, если известна характеристика рассеяния на этом теле? Ответ на этот вопрос положительный. Для доказательства рассмотрим линейную систему с самосопряженной матрицей:

$$\sum_{m=1}^{3} a_{im} E_m = f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3; \quad a_{im} = \sum_{j=1}^{3} bV(\delta_{ij} - \nu_i \nu_j)\,\alpha_{jm}. \tag{12}$$

Тензор α_{ij} определяется геометрией тела и может быть вычислен по формуле (2). Оказывается, что система (12) имеет ранг 2. Сопряженная однородная система (12) имеет собственный вектор ν. Свободный член удовлетворяет условию $(f, \nu) = 0$, где скобки означают скалярное произведение. Это условие гарантирует разрешимость системы (12). Расчетный алгоритм нахождения первичного поля E сводится к следующему:

1) Находим решение G_1 системы (12) при $\nu = \nu_1$, $f_i = f_i(\nu_1)$, где ν_1 — произвольный орт, удовлетворяющее условие $(G_1, \nu_1) = 0$. Такое решение существует и единственно.

2) Находим решение G_2 системы (12) при $\nu = \nu_2$, $f_i = f_i(\nu_2)$, где ν_2 — любой орт, перпендикулярный орту ν_1, удовлетворяющее условию $(G_2, \nu_2) = 0$.

3) Находим E по формуле $E = G_1 + (G_2, \nu_1)\nu_1$, или по формуле $E = G_2 + (G_1, \nu_2)\nu_2$.

Действительно, $G_j = E - (E, \nu_j)\nu_j$, $j = 1, 2$. Поэтому $G_1 + (E, \nu_1)\nu_1 = G_2 + (E, \nu_2)\nu_2$. Отсюда следуют равенства $(G_2, \nu_1) = (E, \nu_1)$, $(G_1, \nu_2) = (E, \nu_2)$, которые приводят к формулам 3) алгоритма.

Нетрудно составить алгоритм вычисления поля E по значениям вектора рассеянного поля, измеренным в двух любых непараллельных направлениях ν_1, ν_2 (не обязательно перпендикулярных).

б) С помощью теоремы 1 можно написать главный член характеристики рассеяния на теле, малом по сравнению с длиной волны падающего поля. Достаточно в известное выражение (см. например, (1б), стр. 1192)

$$f_E = \frac{k_0^2}{4\pi}\left\{\frac{1}{\varepsilon_0}[\nu[P, \nu]] - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}[\nu, M]\right\} \tag{13}$$

подставить вместо P и M их значения по формулам (1), (1а). В формуле (13) ε_0, μ_0 — параметры среды, $k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$, ν — орт, направленный на точку наблюдения, P, M — дипольные электрические и магнитные моменты, приобретенные телом в статических электрическом E и магнитном M полях. Поля E, H совпадают с значениями электрического и соответственно магнитного вектора падающего поля в точке нахождения малого тела.

в) В книге ([2]) изложена теория рассеяния света на малых частицах главным образом эллипсоидальной формы. Результаты п. 1 позволяют развить эту теорию для частиц произвольной формы, что представляет интерес, например, для атмосферной оптики, коллоидной химии, астрофизики, теории радиоизмерений. Рассеяние на больших телах произвольной формы изучено В. А. Фоком ([3]).

г) Рассмотрим скалярную задачу об определении формы выпуклого отражающего тела по характеристике рассеяния:

$$f(n, \nu, k) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \exp\{-ik(\nu, s)\}\frac{\partial u}{\partial N}\,ds. \tag{14}$$

Здесь n, ν — направление распространения падающей и рассеянной волны соответственно. В коротковолновом приближении

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma_-} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma_+} = 2\frac{\partial}{\partial N}\exp\{ik(n, s)\}.$$

Здесь Γ_+, Γ_- — освещенная и теневая части поверхности Γ. В этом приближении формула (14) примет вид

$$f(n, \nu, k) = \frac{k}{2\pi i}\int_{\Gamma_+}\exp\{-ik(\nu - n)(l, s)\}(n, N_s)\,ds, \quad l \equiv \frac{\nu - n}{|\nu - n|}. \tag{15}$$

Вычисляя интеграл при $k \to \infty$ методом стационарной фазы, получим

$$f(n, k, \nu) \simeq -1/2\mathscr{K}(l), \qquad \mathscr{K}(l) = 1/\sqrt{R_1R_2}. \tag{16}$$

Эту формулу можно вывести другим способом исходя из общих результатов ([3]). Здесь $\mathscr{K}(l)$ — гауссова кривизна поверхности в той точке, нормаль к которой совпадает с ортом l. По теореме Минковского ([4]) задание гауссовой кривизны как функции внешней нормали однозначно определяет выпуклую поверхность. Следовательно, зная, например, функцию $f(n, -n, k)$ при всех n и $k \to \infty$, можно восстановить форму отражающего тела. Эффективный способ восстановления основан на следующих соображениях.

Из формулы (15) следует равенство

$$\begin{gathered} f(n, \nu, k) + f^*(-n, -\nu, k) = \frac{k}{2\pi i} \int_\Gamma \exp\{-ik(\nu, -n, s)\}, \\ (n, N_s)\, ds = \frac{1-(\nu, n)}{2\pi} k^2 \int_D \exp\{-ik|n-\nu|(l, y)\}\, dy. \end{gathered} \tag{17}$$

Пользуясь асимптотической формулой (([5]), стр. 42)

$$\int_D e^{ik(l, y)}\, dy = -\frac{4\pi}{\mathscr{K}(l)} \frac{\cos\{ka(l)\}}{k^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right), \quad k \to +\infty, \tag{18}$$

где $a(l)$ — полуширина выпуклого центрально симметричного тела D в направлении l, получаем из формулы (17) при $k \to \infty$ следующее асимптотическое равенство, вычисленное в системе координат, начало которой помещено в центр симметрии тела D, а ось z которой направлена вдоль вектора l:

$$\begin{gathered} f(n, \nu, k) + f^*(-n, -\nu, k) = -\cos\{k_1 a(l)\} / \mathscr{K}(l), \\ k_1 = k|n-\nu|, \quad k \to \infty. \end{gathered} \tag{19}$$

Выражение (19) определяет функцию $a(l)$. Зная эту функцию, нетрудно написать параметрическое уравнение поверхности Γ (([4]), стр. 168):

$$x = \partial a / \partial \alpha, \quad y = \partial a / \partial \beta, \quad z = \partial a / \partial \gamma, \tag{20}$$

где α, β, γ — проекции орта l на декартовы оси.

Отметим, что функция $a(l)$ — опорная функция выпуклой поверхности — является однородной функцией α, β, γ порядка 1 ([4]).

В заключение приношу искреннюю благодарность акад. В. А. Фоку за интерес к работе и ценные советы.

Ленинградский институт
точной механики и оптики

Поступило
21 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Рамм, а) ДАН, **186**, № 1, 62 (1969); б) Радиофизика, Изв. высш. учебн. завед., **12**, № 8, 1185 (1969). [2] Г. Ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, 1961. [3] В. А. Фок, а) Изв. АН СССР, сер. физич., **10**, № 2, 171 (1946); б) УФН, **36**, № 3, 308 (1948). [4] В. Бляшке, Круг и шар, М., 1967. [5] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962. [6] А. Г. Рамм, а) Радиотехника и электроника, **10**, № 11, 2062 (1965); б) III Всесоюзн. симпозиум по дифракции волн. Реф. докл., «Наука», 1964, стр. 143.