

Д. Д. СОКОЛОВ

О ТОПОЛОГИИ МОДЕЛЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 24 IV 1970)

1°. Важным вопросом космологии является задача о выделении тех классов многообразий, которые могут служить моделями Вселенной. Для корректного рассмотрения уравнений Эйнштейна необходимо сначала, исходя из физических соображений, выбрать многообразие, на котором они будут заданы. На основании самых общих физических законов был предложен ряд принципов, ограничивающих топологию моделей Вселенной независимо от их конкретного вида*.

(В) $\mathbb{M}^4$ — гладкое многообразие, на котором можно задать индефинитную метрику сигнатуры (1, 3).

($\mathcal{S}_1$) Все времениподобные и изотропные векторы могут быть разбиты на 2 класса $\{+\}$ и $\{-\}$ так, что, если $\xi \in \{+\}$, то $-\xi \in \{-\}$ и наоборот, и если $\xi_n \in \{+\} (\{-\})$, то $\lim \xi_n \in \{+\} (\{-\})$.

($\mathcal{S}_2$) $\mathbb{M}^4$ не содержит замкнутых времениподобных линий.

($\mathcal{S}_3$) На $\mathbb{M}^4$ существует гладкая функция точки $f(P) = t$ такая, что в некоторых локальных координатах t совпадает с координатой времени.

(ZN) $\mathbb{M}^4$ не содержит неориентируемых пространств $\mathbb{M}^3$.

2°. Класс В уже, чем класс всех гладких многообразий, так как индефинитная метрика может быть задана не на всех многообразиях (необходимое условие этого — равенство 0 эйлеровой характеристики (²)). Принцип В — наиболее фундаментальный из всех этих принципов. Принципы $\mathcal{S}_1$ — $\mathcal{S}_3$ предложены К. Гёделем (¹) как различные формулировки принципа причинности. Принцип ZN предложен Я. Б. Зельдовичем и И. Д. Новиковым как ограничение, следующее из CP-неинвариантности (^{1, 2}).

3°. Дословно повторяя рассуждения (^{1, 2}), можно получить ограничение на топологию моделей Вселенной, следующее из CT-неинвариантности. Если CP-неинвариантность дает возможность отличить две возможные ориентации $\mathbb{M}^3$, то CT-неинвариантность — два возможных направления времени в точках $\mathbb{M}^3$, т. е. две возможные ориентации времениподобных векторов, заданных на $\mathbb{M}^3$. Т. е. при переносе по замкнутому контуру на $\mathbb{M}^3$ времениподобный вектор не должен менять свою ориентацию, что совпадает с определением двусторонности $\mathbb{M}^3$ (³). Таким образом, предлагается следующее ограничение топологии моделей Вселенной:

(WB) $\mathbb{M}^4$ не может содержать односторонне вложенных $\mathbb{M}^3$.

Отметим, что если ZN — внутреннее по отношению к $\mathbb{M}^3$ ограничение, то WB — внешнее.

4°. Приведем иллюстрацию использования принципов ZN и WB: построим многообразие $\mathbb{M}^4$ — прямое произведение бутылки Клейна на плоскость $(p; r)$. Напомним, что прямое произведение двух многообразий с координатами $(u; v)$ и $(p; r)$ является многообразием, точки которого имеют координаты $(u; v; p; r)$. Бутылка Клейна получается склейкой у квадрата в плоскости $(u; v)$ двух сторон с сохранением ориентации и двух — с обращением ее, в результате чего на ней получается координат-

* Ниже использованы обозначения: $\mathbb{M}^4$ — пространство — время; $\mathbb{M}^3$ — пространство (по поводу этого понятия см. 8°); R^1 — действительная прямая. Буквы, нумерующие принципы, обозначают и выделяемые ими классы многообразий.

ная сетка с «периодическими» координатами:

$$(u; v + 2\pi) = (u; v); \quad (u + 2\pi; 2\pi - v) = (u; v). \quad (1)$$

Зададим на этом $\mathbb{M}^4$ две метрики:

$$ds^2 = dp^2 - du^2 - dv^2 - dr^2, \quad (2)$$

$$ds^2 = du^2 - dv^2 - dp^2 - dr^2. \quad (3)$$

В (2) $\mathbb{M}^3$ — прямое произведение бутылки Клейна на R^1 — неориентируемо и (2) не удовлетворяет ZN ; в (3) $\mathbb{M}^3$ — произведение цилиндра и прямой — односторонне вложено в $\mathbb{M}^4$ (доказательство см. в ⁽³⁾), и (3) не удовлетворяет $\mathbb{M}\mathbb{B}$. Идея примеров заимствована в ^(6, 8). То, что (3) не удовлетворяет $\mathcal{G}_2$, несущественно ⁽⁹⁾.

5°. Отметим, что ZN и $\mathbb{M}\mathbb{B}$ физически доказываются прямыми экспериментами.

6°. В какой связи находятся рассмотренные выше принципы? Покажем, что, усиливая $\mathcal{G}_2$, можно получить принцип, из которого следуют $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ и $\mathbb{M}\mathbb{B}$.

($\mathcal{R}\mathcal{B}$) На $\mathbb{M}^4$ можно задать гладкую функцию точки $f(P) = t$ так, что в некоторых локальных координатах t совпадает с координатой времени, t пробегает интервал (a, b) и $f^{-1}(a) = \mathbb{R}_1^3$ и $f^{-1}(b) = \mathbb{R}_2^3$ — трехмерные связанные гладкие многообразия.

Тогда $f(P)$ является функцией Морса многообразия $\mathbb{M}^4$ без критических точек и $\mathbb{R}_1^3$ ⁽⁴⁾ диффеоморфно $\mathbb{R}_2^3$, а

$$\mathbb{M}^4 = \mathbb{R}^3 \times R^1. \quad (4)$$

Как легко проверить, принципы $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathbb{M}\mathbb{B}$ в этом случае тривиально выполнены, а ZN запрещает неориентируемость $\mathbb{R}^3$. Т. е. $\mathcal{R}\mathcal{B}$ сводит проблему топологии моделей Вселенной к трехмерной, где она ставится уже как проблема различных «склеиваний» пространства, т. е. как проблема диаграмм Хегора ⁽³⁾. Отметим, что все известные автору и имеющие физический смысл космологические модели и решения уравнений общей теории относительности удовлетворяют $\mathcal{R}\mathcal{B}$. Можно предполагать, что $\mathcal{R}\mathcal{B}$ следует из $\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2$, $\mathcal{B}$ и $\mathbb{M}\mathbb{B}$. Интересно также выяснить, какие именно многообразия входят в рассмотренные выше классы.

7°. Сформулированные выше принципы допускают естественное обобщение на случай произвольной размерности и сигнатуры; при этом возникают классы $\mathcal{B}_p^1$ (т. е. класс n -мерных гладких многообразий, на которых можно задать метрику сигнатуры $(p; q)$) и т. д. Однако пересечение их не пусто лишь для некоторых n, p, q , так что, может быть, удастся получить n, p и q из этих принципов. Отметим, что если бы наблюдалось нарушение CPT , то оно не дало бы ограничений, аналогичных ZN и $\mathbb{M}\mathbb{B}$, так как PT не меняет ориентации $\mathbb{M}^4$.

8°. В заключение приведем различные определения $\mathbb{M}^3$:

($\mathcal{G}$) $\mathbb{M}^3$ — любое пространственноподобное трехмерное подмногообразие, вложенное в $\mathbb{M}^4$ ⁽⁷⁾.

($\mathcal{GM}$) $\mathbb{M}^3$ — пространственноподобное трехмерное подмногообразие, которое каждая времениподобная геодезическая пересекает один и только один раз ^(5, 7).

В некоторых работах Я. Б. Зельдовича и А. Л. Зельманова для $\mathbb{M}^3$, представимых в виде (4), подразумевается следующее определение пространства:

(ZZ) $\mathbb{M}^3$ — пространственноподобное подмногообразие, диффеоморфное $\mathbb{R}^3$.

* $f^{-1}(a) = \mathbb{R}_1^3$ означает, что для всех t , достаточно близких к a , $f^{-1}(t)$ диффеоморфны $\mathbb{R}_1^3$.

Для определения $\mathcal{G}$ не доказано, что хоть одно $\mathcal{M}^i$ удовлетворяет ZN ; трудности $\mathcal{G}\mathcal{M}$ обсуждаются в (²). В случае обоснования $\mathcal{R}\mathcal{B}$ определение ZZ представляется автору предпочтительным.

Автор благодарен акад. Я. Б. Зельдовичу и проф. Э. Г. Позняку за ценное обсуждение и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Письма ЖЭТФ, 6, в. 7, 772 (1967).
² Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Релятивистская астрофизика, «Наука», 1967. ³ Г. Зейферт, В. Трельфалль, Топология, М.—Л., 1938. ⁴ Дж. Милнор, Теорема об h -кобордизме, М., 1969. ⁵ Э. Малдыбаева, Тез. докл. V Международн. конфер. по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968. ⁶ Д. Блануша, Сборн. Радова матем. инст. бр. 1, Београд, 1951. ⁷ K. Gödel, Rev. Mod. Phys., 21, 447 (1949); Proc. Int. Math. Cambr. Mass., 1, 175 (1950). ⁸ C. T o m p k i n s, Bull. Am. Math. Soc., 47, 208 (1941). ⁹ S. M. Minčič, Glasnik matematički, 2(22), № 2 (1967). ¹⁰ V. Sch u v e g e s c h, Acta Phys. Hung., 20, 273 (1966).