Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

П. ХАДЖИИВАНОВ (БОЛГАРИЯ)

ГИЛЬБЕРТОВ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД НЕ РАЗБИВАЕТСЯ В СЧЕТНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ ОТЛИЧНЫХ ОТ НЕГО ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ, ПОПАРНЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КОТОРЫХ СЛАБО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 V 1970)

Цель настоящей заметки — доказать утверждение, объявленное в заглавии.

Пространство X будем называть слабо бесконечномерным, если ко всякой счетной системе пар замкнутых множеств A_{+n} и A_{-n} таких, что $A_{+n}\cap A_{-n}=\phi$, можно подобрать перегородки * C_n между A_{+n} и A_{-n}, пересечение которых пусто: $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n=\phi$ [1]. Очевидно, замкнутое подмножество слабо бесконечномерного пространства тоже будет слабо бесконечномерным.

Следующие две леммы нуждаются в понятии нормального прилегания, введенного по другому поводу Ю. М. Смирновым (см. [2]):

Множество N топологического пространства X нормально прилегает к своему дополнению $M=X\setminus N$, если любые два непересекающиеся замкнутые в M множества имеют непересекающиеся открытые в X окрестности.

Лемма 1. *Всякое подмножество типа G_δ нормального пространства нормально прилегает к своему дополнению.*

Несложное доказательство этой леммы мы опускаем.

Лемма 2. *Если в нормальном пространстве X подмножество $X\setminus M$ нормально прилегает к слабо бесконечномерному счетно паракомпактному подмножеству M, то ко всякой счетной системе пар замкнутых множеств (A_{+n}, A_{-n}), таких, что $A_{+n}\cap A_{-n}=\phi$, можно подобрать перегородки C_n между A_{+n} и A_{-n}, пересечение которых не имеет общих точек с M: $M\cap\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n=\phi$.*

Для любой пары (A_{+n}, A_{-n}) возьмем такие открытые в X окрестности U_{+n} и U_{-n}, что $\overline{U}_{+n}\cap\overline{U}_{-n}=\phi$. К счетной системе пар замкнутых в M множеств $(M\cap\overline{U}_{+n}, M\cap\overline{U}_{-n})$ можно подобрать перегородки C'_n в M между $M\cap\overline{U}_{+n}$ и $M\cap\overline{U}_{-n}$, пересечение которых пусто: $\bigcap_{n=1}^{\infty} C'_n=\phi$. В счетно паракомпактном пространстве M перегородки C'_n можно раздуть до таких открытых в M множеств L_n, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n=\phi$ и L_n не пересекается с $M\cap\overline{U}_{+n}$ и $M\cap\overline{U}_{-n}$ для любого n. Множества C'_n являются перегородками между $M\cap\overline{U}_{+n}$ и $M\cap\overline{U}_{-n}$ и, следовательно, $M\setminus C'_n=M_{+n}\cup M_{-n}$, где M_{+n} и M_{-n} — непересекающиеся открытые в M окрестности множества $M\cap\overline{U}_{+n}$ и $M\cap\overline{U}_{-n}$. Так как замкнутые в M множества $M_{+n}\setminus L_n$ и $M_{-n}\setminus L_n$ не пе-

* Замкнутое подмножество C пространства X называется перегородкой между множествами A и B, если дополнение $X\setminus C$ разбивается на такие открытые непересекающиеся множества G и H, что $A\subset G$, $B\subset H$.

ресекаются, они имеют непересекающиеся открытые в X окрестности V_{+n} и V_{-n}. Множества

$$C_n = X \setminus (U_{+n} \cup (V_{+n} \setminus \overline{U}_{-n}) \cup U_{-n} \cup (V_{-n} \setminus \overline{U}_{+n}))$$

являются перегородками между A_{+n} и A_{-n} в пространстве X и $M \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \phi$.

Лемма 3. *Если нормальное пространство X является объединением своих слабо бесконечномерных счетно паракомпактных подмножеств X_i, где $X \setminus X_i$ нормально прилегает к X_i, $i = 1, 2, \ldots$, то пространство X слабо бесконечномерно.*

Пусть в бесконечной матрице

$$\begin{matrix} n_{11}, n_{12}, n_{13}, \ldots \\ n_{21}, n_{22}, n_{23}, \ldots \\ n_{31}, n_{32}, n_{33}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

любое натуральное число содержится точно один раз. Если (A_{+n}, A_{-n}), $n = 1, 2, \ldots$, — счетная система пар замкнутых в X и непересекающихся множеств, то нам надо построить такие перегородки C_n в X между A_{+n} и A_{-n}, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \phi$. По лемме 2 к счетной системе пар $(A_{+n_{ki}}, A_{-n_{ki}})$, $i = 1, 2, \ldots$, можно подобрать такие перегородки $C_{n_{ki}}$ в X между $A_{+n_{ki}}$ и $A_{-n_{ki}}$, что $X_k \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{n_{ki}} = \phi$. Тогда $\{C_{n_{ki}}\}_{k,\, i=1}^{\infty}$ будет искомая система перегородок.

В гильбертовом параллелепипеде $I^{\aleph_0} = [-1,1]^{\aleph_0}$ любое подмножество $P = \prod_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ тоже будем называть параллелепипедом, а об его подмножествах $P_{-i} = \alpha_i \times \prod_{n \neq i} [\alpha_n, \beta_n]$ и $P_{+i} = \beta_i \times \prod_{n \neq i} [\alpha_n, \beta_n]$ будем говорить, что они являются его противоположными гранями. Пусть $P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i$, где Φ_i — замкнутые подмножества пространства $I^{\aleph_0}$, $P \not\subset \Phi_i$ ни для какого i, и пересечения $\Phi_i \cap \Phi_j$ слабо бесконечномерны для любых различных i и j. Отметим, что множество $X \setminus M$ нормально прилегает к $M = \bigcup_{i \neq j} (\Phi_i \cap \Phi_j)$ (см. лемму 1), а множество M слабо бесконечномерно (см. лемму 3).

Лемма 4. *Для любого i хотя бы одно из слагаемых Φ_k содержит континуум, соединяющий противоположные грани P_{-i} и P_{+i} параллелепипеда P.*

В силу симметрии можно ограничиться случаем $i = 1$. По лемме 2 существуют перегородки в P между множествами P_{-n} и P_{+n}, $n = 2, 3, \ldots$, такие, что множество $C = \bigcap_{n=2}^{\infty} C_n$ не пересекается с множеством M. Чтобы доказать лемму, достаточно найти хотя бы одну компоненту связности K компакта C, соединяющую P_{-1} с P_{+1}. В самом деле, так как $K \cap M = \phi$, то континуум K разбивается в объединение попарно непересекающихся замкнутых множеств $K \cap \Phi_j$. Значит, по одной теореме Серпинского ([3]) $K = K \cap \Phi_k$ для некоторого натурального k, т. е. $K \subset \Phi_k$, что и требуется леммой.

Покажем, что такую компоненту найти можно. Действительно, если бы таких компонент не было, то нетрудно показать, что компакт C может быть разбит в сумму непересекающихся открыто-замкнутых в C множеств C_+ и

C_- таким образом, что $C_+ \cap P_{-1} = \phi$ и $C_- \cap P_{+1} = \phi$. Ясно, что замкнутые множества $P_{+1} \cup C_+$ и $P_{-1} \cup C_-$ не пересекаются. Значит, их можно разделить в параллелепипеде P замкнутой перегородкой C_1. Итак, противоположные грани P_{-n} и P_{+n}, $n = 1, 2, \ldots$, параллелепипеда P оказалось возможным разделить перегородками C_n с пустым пересечением $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \phi$, чего не может быть (см. ([1]), стр. 75). Следовательно, вопреки предположению, существует компонента связности K компакта C, соединяющая грань P_{-1} с гранью P_{+1}, что и оставалось доказать.

Лемма 5. *Ни одно слагаемое Φ_k не содержит ни одного параллелепипеда N, две грани которого параллельны граням P_{-i} и P_{+i}, а остальные лежат на гранях параллелепипеда P, т. е. $\Phi_k \not\supset N[a_i, b_i] \times \prod\limits_{n \neq i} (\alpha_n, \beta_n)$, где $[a_i, b_i] \subset [\alpha_i, \beta_i]$.*

Конечно, опять можно считать, что $i = 1$. Допустим, что, например, слагаемое Φ_1 содержит целиком некоторый параллелепипед N указанного вида. Тогда объединение замкнутых разностей $\Phi_k \setminus \overset{\circ}{N}$ *, $k \neq 1$, вместе с первым слагаемым Φ_1 покрывает параллелепипед P, никакое из них не содержит P, и все их попарные пересечения слабо бесконечномерны; поэтому можно считать, что данное разбиение таково, что некоторый параллелепипед указанного вида не пересекается ни с одним из слагаемых Φ_k, $k \neq 1$. Так как замкнутое множество Φ_1 не содержит P, то найдется в P параллелепипед $Q = \prod\limits_{k=1}^{\infty} [\gamma_k, \delta_k]$, где $[\gamma_k, \delta_k] = [\alpha_k, \beta_k]$ при $k \neq k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и $Q \cap \Phi_1 = \phi$. Параллелепипед $R = [\alpha_1, \beta_1] \times \prod\limits_{n=2}^{\infty} [\gamma_n, \delta_n]$, очевидно, содержит Q. R не лежит ни в одном из слагаемых Φ_k, $k \neq 1$, так как иначе N пересекался бы с некоторым из них. R не лежит и в Φ_1, так как Q не лежит в Φ_1. Значит, по лемме 4, в R существует континуум K, лежащий в некотором Φ_k и соединяющий грани параллелепипеда R, лежащие на гранях P_{-1} и P_{+1}. Этот континуум K непременно пересекает N и, следовательно, $\Phi_k \cap N \neq \phi$, а это влечет $k = 1$, так что $K \subset \Phi_1$. Но континуум K пересекает и Q, так что $Q \cap \Phi_1 \neq \phi$, что противоречит выбору параллелепипеда Q.

Приступаем к доказательству сформулированного в заглавии предложения.

Пусть $I^{\aleph_0} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k$, где замкнутые подмножества Φ_k не совпадают с $I^{\aleph_0}$ и пересечения $\Phi_i \cap \Phi_j$ слабо бесконечномерны при $i \neq j$. Так как $I^{\aleph_0}$ — полное метрическое пространство, то все слагаемые Φ_k не могут быть нигде не плотными. Значит, хотя бы одно из слагаемых, пусть это будет Φ_1, содержит целиком некоторый такой параллелепипед $Q = \prod\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$, где при $k > n$ имеем $[a_k, b_k] = [-1, 1]$, а $-1 \leqslant a_k < b_k \leqslant 1$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Положим $P^{(i)} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} [a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, где $[a_k^{(i)}, b_k^{(i)}] = [-1, 1]$ при $k \geqslant i$, а $[a_k^{(i)}, b_k^{(i)}] = [a_k, b_k]$ при $k < i$. Ясно, что $P^{(1)} = I^{\aleph_0}$, $P^{(n+1)} = Q$ и $P^{(i+1)} = [a_i, b_i] \times \prod\limits_{k \neq i} [a_k^{(i)}, b_k^{(i)}]$. По лемме 5 параллелепипед $P^{(2)}$ не содержится ни в одном из слагаемых Φ_k. Снова по лемме 5 заключаем, что $P^{(3)}$ не содержится целиком ни в одном из слагаемых Φ_k. Продолжая эти

---

* $\overset{\circ}{N} = (a_i, b_i) \times \prod\limits_{n \neq i} [\alpha_n, \beta_n]$.

рассуждения, на n-м шагу получим, что Q не содержится ни в одном из слагаемых Φ_k, что противоречит выбору параллелепипеда Q. Предложение доказано.

С помощью доказанного утверждения несложно доказать следующую теорему.

Теорема. *Если M — связное топологическое пространство, любая точка x которого имеет окрестность, гомеоморфную произведению $R^{\aleph_0}$, где R — вещественная прямая, то M не разбивается в счетное объединение замкнутых подмножеств, отличных от всего M, попарные пересечения которых слабо бесконечномерны.*

Пусть $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k$, где множества Φ_k замкнуты, $\Phi_k \neq M$ ни для одного k и пересечение $\Phi_i \cap \Phi_j$ слабо бесконечномерно как только $i \neq j$. Пусть $x \in M$ и Ox — окрестность точки x, гомеоморфная пространству $R^{\aleph_0}$; для простоты будем считать, что $Ox = R^{\aleph_0}$. Докажем, что Ox непременно лежит в одном из слагаемых Φ_k.

Действительно, $Ox \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]^{\aleph_0}$, и так как $[-n, n]^{\aleph_0}$ по уже доказанному не имеет разбиения указанного вида, то существует слагаемое Φ_{k_n} не содержащее множество $[-n, n]^{\aleph_0}$. Можем утверждать, что для любого n имеем $k_n = k_1$; в противном случае из неравенства $[-1, 1]^{\aleph_0} \subset \subset \Phi_{k_1} \cap \Phi_{k_n}$ будет следовать, что гильбертов куб $[-1, 1]^{\aleph_0}$ слабо бесконечномерен, что является противоречием (см. ([1]), стр. 75). Значит, $k_n = k_1$ для любого n и, следовательно, $Ox \subset \Phi_{k_1}$. Итак $U = \mathrm{Int}\, \Phi_{k_1} \neq \phi$. Так как пространство M связно, то $\mathrm{Fr}\, U \neq \phi$. Пусть теперь $y \in \mathrm{Fr}\, U$ и Oy — окрестность точки y, гомеоморфная пространству $R^{\aleph_0}$; для простоты будем считать, что $Oy = R^{\aleph_0}$. Мы уже знаем, что существует слагаемое Φ_{k_2}, содержащее Oy. Ясно, что $k_2 \neq k_1$, так как в противном случае имели бы $Oy \subset \subset \Phi_{k_1}$, т. е. $y \in U$, что противоречит выбору точки y. Существует такой индекс n, что $[-n, n]^{\aleph_0} \cap U \neq \phi$ и $[-n, n_1]^{\aleph_0} \not\subset \Phi_{k_1}$.

Действительно, если $[-n, n]^{\aleph_0} \subset M \setminus U$ для любого n, то $Oy \subset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]^{\aleph_0} \subset M \setminus U$, а это влечет $Oy \cap u = \phi$, что является противоречием. С другой стороны, если $[-n, n]^{\aleph_0} \subset \Phi_{k_1}$ для любого n, то $Oy \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]^{\aleph_0} \subset \Phi_{k_1}$, что является противоречием. Положим $F_1 = = [-n, n]^{\aleph_0} \cap \Phi_{k_1}$, $F_2 = [-n, n]^{\aleph_0} \setminus U$. Ясно, что $F_1 \cup F_2 = [-n, n]^{\aleph_0}$, $F_1 \neq [-n, n]^{\aleph_0}$ и $F_2 \neq [-n, n]^{\aleph_0}$. Кроме того, пересечение $F_1 \cap F_2$ слабо бесконечномерно, так как является замкнутым подмножеством слабо бесконечномерного множества $\Phi_{k_1} \cap \Phi_{k_2}$. Это противоречит утверждению, сформулированному в заглавии. Следовательно, разбиение пространства указанного вида невозможно.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Математический факультет
Софийского университета

Поступило
12 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Гуревич, Г. Волмэн, Теория размерности, М., 1948. [2] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн. 69, 141 (1966). [3] W. Sierpinski, Tôhoku Math. J., 13, 300 (1918).