Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 512.41

МАТЕМАТИКА

В. П. ШУНКОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ С НЕКОТОРЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНЕЧНОСТИ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 4 V 1970)

В соответствии с работой [1] локально конечная группа с экстремальными силовскими p-подгруппами (по данному простому числу p) называется S_pF-группой. В частности, если локально конечная группа по любому простому делителю p порядков ее элементов — S_pF-группа, то она называется SF-группой.

В настоящей статье формулируется результат, дающий необходимое и достаточное условие инвариантности максимальной полной абелевой 2-подгруппы в S_2F-группе с бесконечной силовской 2-подгруппой (см. теорему 1). Используя теорему 1, легко доказать, что произвольная SF-группа является расширением абелевой группы с помощью SF-группы с конечными силовскими 2-подгруппами (см. теорему 2). Отсюда и из теорем 3, 4 и результата С. Н. Черникова [2] вытекает, что вопросы 2.1, 8.1, 8.2, поставленные в обзоре [3], а также вопрос 23 из [4] достаточно рассмотреть для SF-групп с конечными силовскими 2-подгруппами, и так как локально разрешимые SF-группы изучены с точностью до SF-групп с конечными силовскими p-подгруппами [5] и локально конечные группы нечетного порядка локально разрешимы [6], то становится понятным значение теорем 2, 3, 4 в связи с рассмотрением указанных вопросов.

С помощью теорем 2, 3 автор доказывает, что для локально конечных групп из условия минимальности для абелевых подгрупп вытекает условие минимальности для подгрупп и силовские p-подгруппы в SF-группе сопряжены. Следовательно, вопросы 2.1, 8.2 из [3] равносильны.

Сопряженность силовских p-подгрупп в локально конечных группах с условием минимальности для подгрупп была впервые установлена в работе [7].

В п. 2 выделяется класс p-групп, названных автором бипримитивно конечными, которые при $p = 2$ совпадают с 2-группами, и на этот класс групп обобщается результат Блэкбэрна о p-группах Черникова [8] (см. теорему 8 настоящей работы).

Пример группы, построенный П. С. Новиковым и С. И. Адяном [9], показывает, что теорема 8 не может быть обобщена на произвольные p-группы даже при условии конечности всех абелевых подгрупп в группе.

В то же время из результата Е. С. Голода [10] вытекает, что бипримитивно конечная p-группа не обязана быть локально конечной.

В качестве следствия теоремы 8 мы получаем, что бипримитивно конечная p-группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа), удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является p-группой Черникова (см. следствие 1).

Следствие 1 при $p = 2$ приведено без доказательства С. П. Струнковым в тезисах Батумского симпозиума, 1967, а для p-групп, в которых любые два элемента порождают конечную группу, доказано В. Г. Виляцером [11].

1. Группу, содержащую (не содержащую) инволюции, будем называть группой четного (нечетного) порядка.

$C_G(M)$ — централизатор множества M элементов из группы G.

$N_G(A)$ — нормализатор подгруппы A в группе G.

$\pi(G)$ — множество простых делителей порядков элементов группы G.

Если A и B — подмножества группы G, то AB — множество элементов из G вида $g = ab$ $(a \in A,\ b \in B)$.

$A \leftthreetimes B$ — полупрямое произведение групп A и B, причем A — нормальный делитель в $A \leftthreetimes B$.

Элемент g группы G называется строго вещественным относительно инволюции i из G, если $igi = g^{-1}$.

Под рангом группы будем понимать специальный ранг в смысле Мальцева ([12]).

Определение 1. Силовская p-подгруппа P счетной локально конечной группы G называется проекционной в G, если группа G обладает такой цепочкой конечных подгрупп

$$N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_s \subset \ldots,$$

объединение которых совпадает с G, что $P \cap N_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$ является силовской p-подгруппой в N_s.

Любая счетная локально конечная группа G по любому $p \subset \pi(G)$ обладает проекционной силовской p-подгруппой. Это нетрудно доказать, используя хорошо известный метод проекций ([13]).

Определение 2. Будем говорить, что S_pF-группа обладает p-полной частью, если в ней максимальная полная абелева p-подгруппа инвариантна. В частности, если силовские p-подгруппы S_pF-группы конечны, то p-полной частью условимся считать единичную подгруппу.

Если G — S_pF-группа, то элемент g порядка p из G назовем элементом 1-го рода, если $C_G(g)$ обладает p-полной частью, и элементом 2-го рода — в противном случае.

Определение 3. Ранг p-полной части некоторой проекционной силовской p-подгруппы счетной S_pF-группы G обозначим через $t_p(G)$ и будем называть p-полным рангом группы G. Индекс p-полной части в подгруппе P группы G назовем p-полным индексом группы G и будем его обозначать через $l_p(G)$.

Если силовские p-подгруппы S_pF-группы G конечны (в частности, если G не содержит элементов порядка p), то условимся считать $t_p(G) = 0$.

Легко доказать, что p-полный ранг счетной S_pF-группы G не зависит от выбора проекционной силовской p-подгруппы, и если для некоторой подгруппы H из G $t_p(H) = t_p(G)$, то $l_p(H) \leqslant l_p(G)$, а также p-полный ранг подгруппы не превосходит p-полного ранга группы.

Теорема 1. *Пусть G — S_2F-группа с бесконечной силовской 2-подгруппой, удовлетворяющая следующему условию:*

**) если H — подгруппа нечетного порядка и $N_G(H)$ содержит квазициклическую 2-подгруппу Q, то $Q \subset C_G(H)$. Тогда максимальная полная абелева 2-подгруппа из G инвариантна в G.*

Теорема 1 доказывается от противного, т. е. предполагается, что существуют S_2F-группы (не нарушая общности рассуждений, можно считать их счетными), удовлетворяющие условию *), но не обладающие 2-полными частями.

В классе всех таких счетных групп выбирается подмножество групп наименьшего 2-полного ранга, а в этом подмножестве класс всех групп наименьшего 2-полного индекса, и этот класс обозначается через K_2.

В первой части доказательства теоремы 1 устанавливается, что в K_2 существует группа, в которой любая инволюция — элемент 1-го рода. Здесь основным инструментом доказательства является теорема Глаубермана ([14]) (а если не пользоваться этой теоремой, то теоремы Грюна ([15])).

Во второй части доказательства теоремы 1 вместо K_2 рассматривается подмножество K_2' всех групп из K_2, в которых любая инволюция — элемент 1-го рода.

Доказывается, что K_2' обладает такой группой, что она либо изоморфна группе типа $PSL(2, T)$ над полем T нечетной характеристики, либо обладает подгруппой, некоторая бесконечная фактор-группа которой изоморфна одной из групп: $SL(2, Q)$, группа Сузуки $S(Q)$, унитарная группа $U_3(Q)$, где Q — поле четной характеристики.

В первом случае мы получаем противоречие с условием *), так как в группе типа $PSL(2, T)$ с бесконечной силовской 2-подгруппой и над полем нечетной характеристики существует абелева подгруппа B нечетного порядка, а в ее нормализаторе — квазициклическая 2-подгруппа, которая не централизует подгруппу B.

Во втором случае мы получаем противоречие с экстремальностью силовской 2-подгруппы в S_2F-группе, так как в бесконечных группах типа $SL(2, Q)$, $S(Q)$, $U_3(Q)$ над полем четной характеристики силовские 2-подгруппы не экстремальны.

Основными инструментами во второй части доказательства теоремы 1 являются результат Горенштейна и Уолтера ([16]), результат Сузуки ([17]) о конечных группах с независимой силовской 2-подгруппой, теорема 14.3.1 из ([15]) и результат Брауэра — Сузуки ([18]).

Теорема 2. *SF-группа является расширением абелевой группы с помощью SF-группы с конечными силовскими 2-подгруппами.*

Теорема 3. *Локально конечная группа с условием минимальности для (абелевых) подгрупп является расширением абелевой группы с помощью группы с конечными силовскими 2-подгруппами и условием минимальности для (абелевых) подгрупп.*

Теорема 4. *Если бесконечная простая локально конечная группа конечного ранга существует, то в ней силовские 2-подгруппы конечны.*

Теорема 5. *Для локально конечных групп из условия минимальности для абелевых подгрупп вытекает условие минимальности для подгрупп.*

Вопрос о справедливости теоремы 5 для произвольных периодических групп остается открытым.

В доказательстве теоремы 5, а также теоремы 7 наряду с теоремой 3 используется следующая лемма.

Лемма. *Пусть G — конечная группа, H — собственная подгруппа четного порядка, совпадающая со своим нормализатором, $j \in G$ — инволюция и $j \notin H$, $D(j)$ — подгруппа из H, порожденная всеми строго вещественными элементами относительно j, и i — некоторая инволюция из H.*

Если подгруппа H 2-взаимно проста со своими сопряженными, т. е. пересекается с любой другой с ней сопряженной подгруппой по подгруппе нечетного порядка, то

1) *подгруппа $D(j)$ нечетного порядка и для любого строго вещественного элемента $a \neq 1$ из H относительно j централизатор $C_G(a)$ нечетного порядка;*

2) *в каждом смежном классе $hC_H(i)$ $(h \in H)$ существует один и только один элемент из $D(j)$, строго вещественный относительно j, и $H = D(j)C_H(i)$;*

3) *никакая силовская p-подгруппа из $D(j)$ не централизуется инволюцией j;*

4) *если $D = H \cap jHj$, то $D \leftthreetimes \{j\}$.*

Теорема 6. *Если в локально конечной группе силовские 2-подгруппы экстремальны и подгруппы нечетного порядка конечны, то сама группа экстремальна.*

Теорема 7. *Силовские p-подгруппы SF-группы сопряжены.*

2. Пусть G — периодическая группа, p — некоторое простое число, удовлетворяющие следующему условию:

Если H — подгруппа из G, N — ее инвариантная экстремальная подгруппа, то в фактор-группе H / N любые два элемента порядка p (если H / N обладает такими элементами) порождают конечную группу.

В этом случае группу G назовем бипримитивно конечной относительно p. Если G бипримитивно конечна относительно любого $p \in \pi(G)$, то группу G назовем бипримитивно конечной.

Любая периодическая группа четного порядка является бипримитивно конечной относительно 2.

С другой стороны, как показывает пример Е. С. Голода ([10]), существуют бипримитивно конечные p-группы (для любого p), не являющиеся локально конечными группами.

Теорема 8. *Если бипримитивно конечная p-группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) обладает конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой, то группа экстремальна.*

Следствие 1. *Если бипримитивно конечная p-группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то группа экстремальна.*

Следствие 2. *Бипримитивно конечная p-группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) тогда и только тогда конечна, когда она порождается конечным числом образующих и некоторая ее максимальная элементарная абелева подгруппа конечна.*

Институт физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Красноярск

Поступило
27 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Шунков, Сибирск. матем. журн., 8, № 1, 213 (1967). [2] С. Н. Черников, Матем. сборн., 7, 49, 539 (1940). [3] С. Н. Черников, УМН, 14, в. 5, 45 (1959). [4] Коуровская тетрадь, Новосибирск, 1965. [5] М. И. Каргаполов, Сибирск. матем. журн., 2, № 6, 853 (1961). [6] W. Feit, I. G. Thompson, Pacific J. Math., 13, № 3, 775 (1963). [7] R. Baer, Math. Ann., 150, № 1, 1 (1963). [8] N. Blackburn, J. Math., 6, 421 (1962). [9] П. С. Новиков, С. И. Адян, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 1, 2, 3 (1968). [10] Е. С. Голод, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 273 (1964). [11] В. Г. Виляцер, УМН, 13, № 2, 163 (1958). [12] А. И. Мальцев, Матем. сборн., 22, 273 (1948). [13] А. Г. Курош, Теория групп, 3 изд., «Наука», 1967. [14] G. Glauberman, J. Algebra, 4, 403 (1966). [15] М. Холл, Теория групп, ИЛ, 1962. [16] D. Gorenstein, J. Walter, J. Math., 6, 553 (1962). [17] M. Suzuki, Ann. Math., 80, 58 (1964). [18] R. Brauer, M. Suzuki, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45, 1757 (1959).