Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 6

УДК 519.49

МАТЕМАТИКА

А. Я. ХЕЛЕМСКИЙ

# ОПИСАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОЕКТИВНЫХ ИДЕАЛОВ В АЛГЕБРАХ $C(\Omega)$

*(Представлено академиком П. С. Александровым 8 V 1970)*

1. Пусть $A$ — банахова алгебра с единицей; говоря $A$-модуль, мы всегда будем подразумевать левый банахов модуль над $A$. $A$-модуль называется относительно проективным (в дальнейшем для краткости проективным), если он представим как прямое слагаемое модуля вида $A\hat{\otimes}X$, где $X$ — произвольное банахово пространство, $\hat{\otimes}$ — знак тензорного произведения с сильнейшей кросс-нормой [1], а внешнее умножение задается формулой $a\cdot(b\otimes x)=ab\otimes x$; $a,b\in A$, $x\in X$. Алгебра $A$ называется относительно наследственной (далее наследственной), если каждый замкнутый левый идеал в $A$ является проективным $A$-модулем.

Как показано в [2], вопрос о проективности идеалов в заданной банаховой алгебре тесно связан со строением важного класса ее сингулярных расширений. Там же было выяснено, что уже при рассмотрении алгебр $C(\Omega)$ (состоящих из всех непрерывных функций на компакте $\Omega$) не все они оказываются наследственными.

В настоящей работе дается полное описание проективных идеалов в алгебрах $C(\Omega)$ и, тем самым, наследственных алгебр из этого класса.

Пространство модулярных максимальных идеалов коммутативной банаховой алгебры $I$ (вообще говоря, без единицы) мы будем называть ее спектром; напомним [3], что спектр замкнутого идеала $I$ в коммутативной банаховой алгебре $A$ со спектром $\Omega$ есть с точностью до гомеоморфизма открытое множество $\Omega_0=\{t\in\Omega;\ f(t)\neq 0$ для некоторой $f\in I\}$.

Основной результат работы

Теорема 4. *Замкнутый идеал $I\subset C(\Omega)$ является проективным $C(\Omega)$-модулем тогда и только тогда, когда его спектр паракомпактен.*

Автоматическим следствием является

Теорема 5. *Алгебра $C(\Omega)$ наследственна тогда и только тогда, когда любое открытое множество в $\Omega$ паракомпактно.*

Как известно, спектры максимальных идеалов в $C(\Omega)$ суть множества вида $\Omega\setminus\{t\}$; $t\in\Omega$. Поэтому, объединяя теорему 4 с результатами работы [7], получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Следующие свойства компакта $\Omega$ эквивалентны:*

(I) $\mathrm{s.\,dim}\, C(\Omega)\leqslant 1$;

(II) *любое полускалярное расширение алгебры $C(\Omega)$ сильно разложимо;*

(III) *каждое множество вида $\Omega\setminus\{t\}$; $t\in\Omega$ паракомпактно.*

Переходя к доказательству теоремы 4, отметим, что и достаточность, и необходимость вытекают из утверждений более общего характера, которые применимы и для других банаховых алгебр, помимо $C(\Omega)$.

2. Доказательство достаточности.

Для произвольного (индексного) множества $\Lambda$ через $N(\Lambda)$ будем обозначать множество конечных наборов из $\Lambda$, упорядоченное по включению. Сеть $e_\lambda$; $\lambda\in N(\Lambda)$ элементов банаховой алгебры $I$ назовем правой аппроксимативной единицей (п.а.е.) в $I$, если для любого $a\in I$ $\lim_\lambda ae_\lambda=a$.

Теорема 1. *Пусть $I$ — замкнутый левый идеал в банаховой алгебре $A$. Пусть, далее, существует ограниченное множество $g_\mu\in I$; $\mu\in\Lambda$ со следующими свойствами:*

(I) *для любых* $\lambda = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in N(\Lambda)$, $a \in A$ *и любого корня* $\xi$ *n-й степени из единицы* $\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi^i a g_{\mu_i} \right\| \leqslant C \max_i \| a g_{\mu_i} \|$, *где* $C$ — *некоторая константа;*

(II) *сеть* $e_\lambda$; $\lambda \in N(\Lambda)$, *где для* $\lambda = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ $e_\lambda = \sum_{i=1}^{n} g^2_{\mu_i}$ — *является п.а.е. в* $I$;

(III) *для любых* $x \in I$ *и* $\varepsilon > 0$ $\|x g_\mu\| \geqslant \varepsilon$ *лишь для конечного множества* $\mu$ *из* $\Lambda$.

*Тогда* $I$ *является проективным* $A$-*модулем.*

Рассмотрим модуль $A \hat{\otimes} I$ и эпиморфизм $\pi$: $A \hat{\otimes} I \to I$ такой, что $\pi(a \otimes x) = ax$; $a \in A$; $x \in I$. Очевидно, достаточно построить морфизм $A$-модулей $\rho$: $I \to A \hat{\otimes} I$ такой, что $\pi \circ \rho = 1_I$.

Лемма 1.1. *Для любых* $x \in I$, $\lambda = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in N(\Lambda)$ *и* $u \in A \hat{\otimes} I$: $u = \sum_{i=1}^{n} x g_{\mu_i} \otimes g_{\mu_i}$ *выполнено неравенство* $\|u\| \leqslant C \max_i \| x g_{\mu_i} \| \cdot \max_i \| g_{\mu_i} \|$.

Как легко проверить, для первообразного корня $\zeta$ $n$-й степени из единицы

$$u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x g_{\mu_1} + \zeta^i x g_{\mu_2} + \ldots + \zeta^{i(n-1)} x g_{\mu_n}) \otimes (g_{\mu_1} + \zeta^{-i} g_{\mu_2} + \ldots + \zeta^{-i(n-1)} g_{\mu_n}).$$

Следовательно, по определению нормы в $A \hat{\otimes} I$, $\|u\|$ не превосходит среднего арифметического произведений норм тензорных «сомножителей». Тем самым требуемое неравенство вытекает из (I).

Зафиксируем $x \in I$ и для любого $\lambda = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in N(\Lambda)$ положим $u_\lambda = \sum_{i=1}^{n} x g_{\mu_i} \otimes g_{\mu_i}$.

Лемма 1.2. *Сеть* $u_\lambda$ *сходится в* $A \hat{\otimes} I$.

Ввиду полноты $A \hat{\otimes} I$, достаточно показать, что сеть $u_\lambda$ фундаментальна. Пусть $\varepsilon > 0$; возьмем конечный набор $\lambda \in N(\Lambda)$ такой, что при $\mu \,\overline{\in}\, \lambda$ $\|x g_\mu\| < \varepsilon$ (такой набор существует согласно (III)). Тогда при $\lambda < \lambda', \lambda''$ разность $u_{\lambda'} - u_{\lambda''}$ представима в виде

$$\sum_{i=1}^{m} x g_{\mu_i} \otimes g_{\mu_i} - \sum_{j=1}^{n} x g_{\nu_j} \otimes g_{\nu_j},$$

где $\mu_i, \nu_j \,\overline{\in}\, \lambda$. Отсюда, используя лемму 1.1, получаем, что

$$\| u_{\lambda'} - u_{\lambda''} \| \leqslant 2C\varepsilon \max_{\mu \in \Lambda} \| g_\mu \|;$$

тем самым лемма доказана.

Конец доказательства. Зададим отображение $\rho : I \to A \hat{\otimes} I$, положив для $x \in I$

$$\rho(x) = \lim_\lambda \Big( \sum_{\mu \in \lambda} x g_\mu \otimes g_\mu \Big) \in A \hat{\otimes} I.$$

Очевидно, $\rho$ — морфизм (банаховых) $A$-модулей. Далее, как легко видеть, $\pi \circ \rho(x) = x$ для любого $x \in I$. Тем самым, доказательство теоремы 1 закончено.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega$ — *компакт,* $\Omega_0$ — *его открытое паракомпактное подмножество. Тогда в идеале* $I = \{f \in C(\Omega) : f(t) = 0$ *при* $t \in \Omega \setminus \Omega_0\}$ *существует множество* $\{g_\mu\}$; $\mu \in \Lambda$, *удовлетворяющее условиям* (I) — (III) *теоремы* 1.

Основным вспомогательным предложением является следующая лемма, подсказанная автору А. В. Архангельским.

Лемма 2.1. *Для любого паракомпактного локально компактного топологического пространства $\Omega_0$ существует его открытое покрытие $\mathfrak{U}$ относительно компактными множествами такое, что у каждой точки из $\Omega_0$ есть окрестность, пересекающаяся не более, чем с тремя множествами из $\mathfrak{A}$.*

Возьмем любое открытое покрытие пространства $\Omega_0$ относительно компактными множествами и впишем в него локально конечное открытое покрытие $\mathfrak{B}$. Для любой точки $t \in \Omega_0$ определим по индукции множества $S_n(t)$; $n = 0, 1, \ldots$, положив $S_0(t) = \{t\}$ (одноточечное множество) и $S_n(t) = \bigcup\{U \in \mathfrak{B}\colon U \cap S_{n-1}(t) = \phi\}$ для $n > 0$; положим, далее, $S(t) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n(t)$. Очевидно, для любого $t \in \Omega_0$ $S(t)$ — $\sigma$-компакт, причем для разных $t$ эти множества либо совпадают, либо не пересекаются. Возьмем, пользуясь аксиомой выбора, $T \subset \Omega_0$ такое, что для $t', t'' \in T$, $t' \neq t''$ $S(t') \cap S(t'') = \phi$ и $\bigcup\limits_{t \in T} S(t) = \Omega_0$.

Определим теперь для $t \in T$ и $n > 0$ $V_{t,n} = S_{n+1}(t) \setminus \overline{S_{n-1}(t)}$; положим далее $V_{t,0} = S_1(t)$ и $\mathfrak{U} = \{V_{t,n};\ t \in T;\ n \geqslant 0\}$. $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие $\Omega_0$ относительно компактными множествами; при этом, как легко видеть, $V_{t',m} \cap V_{t'',n}$ может быть не пусто лишь при $t' = t''$ и $|m-n| \leqslant 1$. Отсюда у каждой точки $s \in \Omega_0$; $s \in V_{t,n}$ есть окрестность (именно, само $V_{t,n}$), пересекающаяся не более чем с тремя множествами из $\mathfrak{U}$. Тем самым лемма доказана.

Конец доказательства. Применим лемму 2.1 к спектру $\Omega_0$ идеала $I$; пусть $\mathfrak{U}$ — соответствующее покрытие. Обозначим через $h_\mu$; $\mu \in \Lambda$; $0 \leqslant h_\mu \leqslant 1$ разложение единицы, подчиненное $\mathfrak{A}$ (см. Келли [4]); все эти функции, очевидно, принадлежат $I$. Положим $g_\mu = \sqrt{h_\mu}$. Тогда, как нетрудно видеть, из определения нормы в $C(\Omega)$ и равенства $\sum\limits_{\mu} g_\mu^2(t) = 1$, в котором для любого $t \in \Omega_0$ не более трех слагаемых отличны от нуля, следует $\max\limits_{\mu} \|g_\mu\| \leqslant 1$ и $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i a g_{\mu_i}\right\| \leqslant \sqrt{3}\, \max\limits_{i} \|a g_{\mu_i}\|$ для любого $a \in C(\Omega)$, т. е. выполнено (I). Далее, любой компакт $K \subset \Omega_0$ пересекается лишь с конечным числом множеств из (локально конечного) покрытия $\mathfrak{U}$, и для всех $x \in I$ $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ на $\Omega_0$; отсюда легко следуют (II) и (III). Тем самым теорема 2 доказана.

3. Доказательство необходимости.

Теорема 3. *Пусть $A$ — коммутативная банахова алгебра со спектром $\Omega$, $I$ — замкнутый идеал в $A$ со спектром $\Omega_0 \subset \Omega$, являющийся проективным $A$-модулем. Тогда пространство $\Omega_0$ паракомпактно.*

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма 3.1. *Существует непрерывная комплексная функция $F(s, t)$ на топологическом произведении $\Omega_0 \times \Omega$, обладающая свойствами $F(s, s) = 1$; $s \in \Omega_0$ и $f(s, t) = 0$ при $t \overline{\in} \Omega_0$.*

Пусть $i\colon A \hat{\otimes} I \to C(\Omega \times \Omega)$ — естественное вложение $A$-модулей [2]. Будем писать для кратности $u(s,t)$ вместо $i(u)(s,t)$ для $u \in A \otimes I$. Как легко видеть, $u(s, t) = 0$ при $t \overline{\in} \Omega_0$; $u \in A \hat{\otimes} I$.

Поскольку $I$ проективен, существует морфизм $A$-модулей $\rho\colon I \to A \hat{\otimes} I$ такой, что $\pi \circ \rho = 1_I$. Для $s \in \Omega_0$ возьмем $x \in I$ такой, что $x(s) = 1$, и положим для любого $t \in \Omega$ $F(s,t) = \rho(x)(s,t)$. Как легко видеть, функция $F\colon \Omega_0 \times \Omega \to \mathbf{C}$ не зависит от выбора $x$ и непрерывна на $\Omega_0 \times \Omega$.

Возьмем теперь для любого $s \in \Omega_0$ элемент $x \in I$ такой, что $x(s) = 1$; тогда $F(s, s) = \rho(x)(s, s) = [\pi \circ \rho(x)](s) = x(s) = 1$ и $F(s, t) = \rho(x)(s,t) = 0$ при $t \overline{\in} \Omega_0$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $G(s, t)$ — действительная неотрицательная ограни-*

*ченная непрерывная функция на $\Omega_0 \times \Omega_0$ такая, что для любого компакта $K \subset \Omega_0$ $G(s, t) \to 0$ равномерно при $s \to \infty$, $t \in K$. Тогда для любого подмножества $M \subset \Omega_0$ функция $m(t) = \sup_{s \in M} G(s, t)$ непрерывна на $\Omega_0$.*

Пусть, напротив, (полунепрерывная снизу) функция $m(t)$ терпит разрыв в точке $t_0 \in \Omega_0$; тогда существует $\varepsilon > 0$ и сеть $t_\lambda$; $\lambda \in \Lambda$ такие, что $\lim_\lambda t_\lambda = t_0$ и $m(t_\lambda) > m(t_0) + \varepsilon$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Поэтому есть и сеть $s_\lambda$; $\lambda \in \Lambda$; $s_\lambda \in M$, такая, что $G(s_\lambda, t_\lambda) > m(t_0) + \varepsilon$. Ввиду $\lim_\lambda t_\lambda = t_0 \in \Omega_0$, можно, не теряя общности, считать, что все $t_\lambda \in K$ для некоторого компакта $K \subset \Omega_0$. Но, по условию леммы, $G(s, t) \to 0$ равномерно при $s \to \infty$; $t \in K$. Поэтому сеть $s_\lambda$, будучи расположена вне некоторой окрестности бесконечности, должна иметь предельную точку $s_0 \in \Omega_0$; очевидно, не теряя общности, можно считать, что $s_0 = \lim_\lambda s_\lambda$.

Но тогда $(s_0, t_0) = \lim_\lambda (s_\lambda, t_\lambda)$; следовательно, $G(s_0, t_0) = \lim_\lambda G(s_\lambda, t_\lambda)$. Отсюда $m(t_0) \geqslant \lim_\lambda G(s_\lambda, t_\lambda)$, что противоречит неравенству $G(s_\lambda, t_\lambda) > m(t_0) + \varepsilon$. Это противоречие и доказывает лемму.

Лемма 3.3. *Существует множество $\{f_\mu;\ \mu \in \Lambda\}$ непрерывных неотрицательных функций на $\Omega_0$, стремящихся к нулю на бесконечности и таких, что $\sum_\mu f_\mu(t) = 1$ для каждого $t \in \Omega_0$.*

Возьмем функцию $F(s, t)$ из леммы 3.1 и для каждых $s, t \in \Omega_0$ положим $G(s, t) = \min\{|F(s, t)|;\ 1\} \cdot \min\{|F(t, s)|;\ 1\}$. Тогда функция $G(s, t)$ удовлетворяет условиям леммы 3.2, и, сверх того, $\sup_{s \in \Omega_0} G(s, t) = 1$. Расположим точки пространства $\Omega_0$ в трансфинитную последовательность и определим для порядкового числа $\alpha$ функцию $f_\alpha(t) = \sup_{\beta \leqslant \alpha} G(s_\beta, t) - \sup_{\beta < \alpha} G(s_\beta, t)$. Из леммы 3.2 следует, что все $f_\alpha$ непрерывны; далее, ввиду $f_\alpha(t) \leqslant G(s_\alpha, t)$, $\lim_{t \to \infty} f_\alpha(t) = 0$. Наконец, для любого $t \in \Omega_0$ $\sum_{\alpha:\ s_\alpha \in \Omega} f_\alpha(t) = \sup_{s \in \Omega_0} G(s, t) = 1$. Тем самым доказательство леммы закончено.

Конец доказательства. Для порядкового числа $\alpha$ и натурального $n$ положим $U_{\alpha, n} = \{s \in \Omega_0 \colon f_\alpha(s) > 1/n\}$ ($f_\alpha$ из предыдущей леммы) и возьмем $\mathfrak{U}_n = \{U_{\alpha, n} \neq \phi\}$; очевидно, для каждого $n$ система $\mathfrak{U}_n$ локально конечна.

Пусть теперь $\mathfrak{V}$ — произвольное открытое покрытие пространства $\Omega_0$. Поскольку каждое $U_{\alpha, n}$ относительно компактно, существует конечная система $\{V_k \in \mathfrak{V}\}$; $1 \leqslant k \leqslant m_{\alpha, n}$, покрывающая $U_{\alpha, n}$. Положим $W_{\alpha, n, k} = U_{\alpha, n} \cap V_k$ и для каждого $n$ возьмем $\mathfrak{W}_n = \{W_{\alpha, n, k} \neq \phi\}$. Система $\mathfrak{W}_n$ вписана в $\mathfrak{U}$ и, очевидно, локально конечна; кроме того, поскольку каждая $s \in \Omega_0$ принадлежит некоторому $U_{\alpha, n}$, а, следовательно, и некоторому $W_{\alpha, n, k}$, система $\mathfrak{W} = \bigcup_n \mathfrak{W}_n$ является покрытием пространства $\Omega_0$.

Итак, в каждое открытое покрытие пространства $\Omega_0$ можно вписать открытое $\sigma$-локально конечное покрытие. Следовательно (Келли [4]), $\Omega_0$ паракомпактно, и теорема 3 доказана.

Полученная теорема содержит как частный случай «необходимую» часть теоремы 4, в то время как теоремы 1 и 2 вместе дают «достаточность». Таким образом, теорема 4, а вместе с ней и ее прямые следствия — теоремы 5 и 6 — доказаны.

В заключение автор считает своим приятным долгом отметить ту помощь, которую ему неоднократно оказывал А. В. Архангельский своими советами.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Дэй, Нормированные линейные пространства, М., 1961. [2] А. Я. Хелемский, Матем. сборн., 81 (123), № 3, 430 (1970). [3] C. E. Rickart, General Theory of Banach Algebras. Princeton, N.Y., 1960. [4] Дж. Л. Келли. Общая топология, М., 1968.