Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 1

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Н. ХАДЖИИВАНОВ (БОЛГАРИЯ)

n-МЕРНЫЙ КУБ НЕЛЬЗЯ РАЗБИТЬ В СЧЕТНОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ, ПОПАРНЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КОТОРЫХ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ $(n-2)$-МЕРНЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 14 IV 1970)

Утверждение, объявленное в заглавии, для двух слагаемых было доказано П. С Урысоном в его знаменитой работе «О канторовых многообразиях» (см. ([1]), стр. 435).

Пусть n-мерный параллелепипед P содержится в счетном объединении замкнутых подмножеств Φ_k пространства E^n, $P \not\subset \Phi_k$ и $\dim(\Phi_i \cap \Phi_j) \leqslant n-2$ для любых различных i и j.

Лемма 1. *Для любого i хотя бы одно из слагаемых Φ_k содержит континуум, соединяющий противоположные грани P_{-i} и P_{+i} параллелепипеда P.*

В силу симметрии можно ограничиться случаем $i=1$. Положим $M = \bigcup\limits_{i\neq j}(\Phi_i \cap \Phi_j)$. Множество M имеет размерность $\dim M \leqslant n-2$, а (P_{-i}, P_{+i}), $i = 2, 3, \ldots, n$, суть $(n-1)$ пар замкнутых множеств, для которых $P_{-i} \cap P_{+i} = \phi$. Тогда в P существуют такие замкнутые перегородки C_i между P_{-i} и P_{+i}, что множество $C = \bigcap\limits_{i=2} C_i$ не пересекается с множеством M. Чтобы доказать лемму, достаточно найти хотя бы одну компоненту связности K компакта C, соединяющую P_{-1} с P_{+1}. В самом деле, так как $K \cap M = \phi$, то континуум K разбивается в объединение попарно не пересекающихся замкнутых множеств $K \cap \Phi_k$. Значит, по известной теореме Серпинского ([2]), $K = K \cap \Phi_k$ для некоторого k, т. е. $K \subset \Phi_k$, что и требуется леммой. Покажем, что такую компоненту K найти можно. Действительно, если бы таких компонент не было, то в силу известного утверждения, что всякая компонента связности компакта является его квазикомпонентой, мы сможем для каждой компоненты связности компакта C взять открыто-замкнутую в C окрестность O, не пересекающую одновременно граней P_{-1} и P_{+1}. Эти окрестности O покрывают компакт C и из них можно выбрать конечное подпокрытие $O_1, O_2, \ldots, O_p$. Обозначим через C_- объединение грани P_{-1} со всеми теми окрестностями O_i, которые не пересекают грани P_{+1}, а через C_+ — объединение грани P_{+1} с открыто-замкнутым в C дополнением $C \setminus C_-$. Ясно, что замкнутые множества C_- и C_+ не пересекаются. Значит, их можно разделить в параллелепипеде P замкнутой перегородкой C_1. Итак, противоположные грани параллелепипеда P оказалось возможным разделить перегородками $C_1, C_2, \ldots, C_n$ с пустым пересечением, чего не может быть. Следовательно, вопреки предположению, существует компонента связности K компакта C, соединяющая грань P_{-1} с гранью P_{+1}, что и оставалось доказать.

Лемма 2. *Ни одно слагаемое Φ_k не содержит ни одного параллелепипеда N, две грани которого параллельны граням P_{-i} и P_{+i}, а остальные — лежат на гранях параллелепипеда P.*

Конечно, опять можно предполагать, что $i=1$. Допустим, что, например, слагаемое Φ_1 содержит целиком некоторый параллелепипед N указанного вида. Тогда объединение замкнутых разностей $\Phi_k \setminus \operatorname{Int} N$, $k \neq 1$, вместе с первым слагаемым Φ_1, покрывает параллелепипед P, никакое из них не содержит P и все их попарные пересечения самое большее $(n-2)$-мерны. Поэтому можно считать, что еще данное разбиение таково, что некоторый параллелепипед N указанного вида не пересекается ни с одним из слагаемых Φ_k, $k \neq 1$. Так как замкнутое множество Φ_1 не содержит P, то найдется в P куб Q с гранями, параллельными граням параллелепипеда P, который не пересекается с множеством Φ_1. Продолжив его грани, параллельные граням P_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, до пересечения с гранями P_{-1} и P_{+1}, мы получим параллелепипед R, который содержит Q. Параллелепипед R не лежит ни в одном из слагаемых Φ_k, $k \neq 1$, так как иначе N пересекался бы с одним из них. R не лежит и в Φ_1, так как не лежит в Φ_1 куб Q. Значит, по лемме 1 существует континуум K, лежащий в некотором $R \cap \Phi_k$ и соединяющий грани параллелепипеда R, лежащие на гранях P_{-1} и P_{+1}. Этот континуум непременно пересекает параллелепипед N и, следовательно, $\Phi_k \cap N = \phi$, а это значит, что $k = 1$. Итак, $K \subset \Phi_1$. Но континуум K пересекает и куб Q, так что $Q \cap \Phi_1 \neq \phi$, а это противоречит выбору куба Q. Лемма доказана.

Теорема. *n-Мерный куб нельзя разбить в счетное объединение замкнутых подмножеств, отличных от всего куба, попарные пересечения которых не более чем $(n-2)$-мерны.*

Пусть n-мерный куб I^n разбит в счетное объединение замкнутых подмножеств Φ_k, $\Phi_k \neq I^n$, $\dim(\Phi_i \cap \Phi_j) \leqslant n-2$ для любых различных i и j. Так как I^n является полным метрическим пространством, то все слагаемые Φ_k не могут быть нигде не плотными. Значит, хотя бы одно из слагаемых содержит целиком некоторый куб Q с гранями, параллельными граням куба I^n. Пусть это будет слагаемое Φ_1. Существует последовательность параллелепипедов P_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, с гранями, параллельными граням куба I^n, первый из которых совпадает с I^n, а последний — с Q, и, кроме того, все грани параллелепипеда P_{i+1}, за исключением одной пары противоположных, лежат на гранях параллелепипеда P_i. Параллелепипед P_n получим следующим образом. Продолжаем все грани куба Q за исключением одной единственной пары противоположных до пересечения с гранями куба I^n. Продолженные грани разбивают куб I^n на 3^{n-1} параллелепипедов. P_n будет тот из них, который содержит Q. Параллелепипед P_{n-1} построим таким же образом, но на этот раз исходя из P_n и продолжая все его грани за исключением одной единственной пары противоположных, отличных от тех, которые лежат на гранях куба I^n. Ясно, что этот процесс оборвется на $(n-1)$-м шагу, на котором получим параллелепипед P_2. Все грани его, за исключением одной единственной пары противоположных, будут лежать на гранях куба I^n.

По лемме 2 параллелепипед P_2 не содержится целиком ни в одном из слагаемых Φ_k. Тогда по лемме 2 P_3 не содержится ни в одном из слагаемых Φ_k. Продолжая эти рассуждения, на n-м шагу получим, что Q не содержится ни в одном из слагаемых Φ_k, что противоречит выбору куба Q. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если отделимое топологическое векторное пространство L обладает базисом, состоящим из хотя бы n элементов, то L нельзя разбить в счетное объединение замкнутых подмножеств, отличных от всего L, попарные пересечения которых не более чем $(n-2)$-мерны.*

Это следствие довольно легко получается из теоремы с помощью следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть $\{X_\alpha\}$ — семейство таких замкнутых подмножеств пространства X, что для любого α X_α не разбивается в счетное объединение замкнутых подмножеств, отличных от X_α, попарные пересечения которых не более чем $(n-1)$-мерны; тогда, если $\dim(X_{\alpha_0} \cap X_\alpha) \geqq n$ для любого $\alpha \neq \alpha_0$, то и $X' = \bigcup_\alpha X_\alpha$ не разбивается в счетное объединение указанного вида.*

Пусть существует разбиение $X' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k$, где слагаемые Φ_k замкнуты, $\Phi_k \neq X'$ ни для одного k и $\dim(\Phi_i \cap \Phi_j) \leqslant n-1$ для различных i и j. Так как X_α таким образом не разбивается, то для любого α существует Φ_{k_α}, содержащее X_α. Из включения $X_{\alpha_0} \cap X_\alpha \subset \Phi_{k_{\alpha_0}} \cap \Phi_{k_\alpha}$ следует, что $\dim(\Phi_{k_{\alpha_0}} \cap \Phi_{k_\alpha}) \geqslant n$, а это влечет $k_\alpha = k_{\alpha_0}$, т. е. $\Phi_{k_\alpha} = \Phi_{k_{\alpha_0}}$. Тогда $X_\alpha \subset \subset \Phi_{k_{\alpha_0}}$ для всякого α и следовательно, $X' = \Phi_{k_{\alpha_0}}$, что является противоречием. Лемма доказана.

Доказательство следствия 1. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — n различных элементов базиса пространства L и α — произвольный элемент пространства L. Выпуклую оболочку, натянутую на элементах $\alpha, l_1, l_2, \ldots, l_n$, обозначим через L_α. L_α есть замкнутое подмножество пространства L, гомеоморфное m-мерному симплексу T^m, где $m \geqslant n$. По теореме множество L_α не разбивается в счетное объединение замкнутых подмножеств, отличных от L_α, попарные пересечения которых не более чем $(n-2)$-мерны. Кроме того, пересечение $L_{l_1} \cap L_\alpha$ содержит L_{l_1}, так что $\lim (L_{l_1} \cap L_\alpha) \geqslant \geqslant n-1$. Наконец, $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$. Чтобы закончить доказательство следствия 1, остается лишь применить лемму 3.

Следствие 2. *Если M связаное топологическое пространство, любая точка x которого имеет окрестность, гомеоморфную $m(x)$-мерному эвклидову пространству $E^{m(x)}$, где $m(x) \geqslant n$, то M не разбивается в счетное объединение замкнутых подмножеств, отличных от всего M, попарные пересечения которых не более чем $(n-2)$-мерны.*

Пусть $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k$, где $M \neq \Phi_k$ ни для одного k и $\dim(\Phi_i \cap \Phi_j) \leqslant \leqslant n-2$ как только $i \neq j$ и множества Φ_k замкнуты. Пусть $x \in M$ и $\overline{Ox}$ есть замкнутая окрестность точки x, гомеоморфная кубу $I^{m(x)}$, где $m(x) \geqslant \geqslant n$. Из теоремы следует, что $\overline{Ox}$ непременно лежит в одном из слагаемых Φ_k, пусть в Φ_1. Значит $U = \operatorname{Int} \Phi_1 \neq \phi$. Так как пространство M связно, то $\operatorname{Fr} U \neq \phi$. Пусть теперь $y \in \operatorname{Fr} U$ и $\overline{Oy}$ — замкнутая окрестность точки y, гомеоморфная кубу $I^{m(y)}$, где $m(y) \geqslant n$. Найдется такое слагаемое Φ_k, $k \neq 1$, что $\overline{Oy} \subset \Phi_k$. Положим $F_1 = \Phi_1 \cap \overline{Oy}$ и $F_2 = \overline{Oy \setminus U}$. Ясно, что $F_1 \neq \overline{Oy}$, $F_2 \neq \overline{Oy}$, $F_1 \cup F_2 = \overline{Oy}$ и $\dim(F_1 \cap F_2) \leqslant \dim(\Phi_1 \cap \cap \Phi_k) \leqq n-1$, что противоречит теореме. Следовательно, разбиение пространства M указанного вида невозможно.

Считаю своим долгом выразить благодарность проф. Ю. М. Смирнову за внимание, проявленное им к этой работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Урысон, Тр. по топологии и другим областям математики, 1, М.— Л., 1951. [2] W. Sierpinski, Tôhoku Math. J., 13, 300 (1918).