

В. Д. ЧАРУШНИКОВ

ОБ УНИВЕРСАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 IV 1970)

1°. В данной заметке рассматриваются итерационные процессы решения операторных уравнений

$$Au = f \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве H . A — линейный самосопряженный и положительно определенный оператор, отображающий пространство H в себя. Искомое решение и его приближения мы можем рассматривать как элементы целой шкалы гильбертовых пространств $\{H_\alpha\}$ (α — любое вещественное число), в которых скалярное произведение и норма определяются соответственно равенствами:

$$(u, v)_\alpha = (A^\alpha u, v) \quad \|u\|_\alpha = \sqrt{(u, u)_\alpha}. \quad (2)$$

Под универсальным итерационным процессом мы будем понимать итерационный процесс

$$u_{n+1, \alpha} = u_0 + P_{n, \alpha}(A) [f - Au_0], \quad (3)$$

где u_0 — начальное приближение, а последовательность полиномов $P_{n, \alpha}$ строится для целого класса операторных уравнений (1) с самосопряженными, положительно-определенными операторами, спектр которых заключен в фиксированном промежутке $[m, M]$ ($0 < m < M$). Зафиксировав α , мы будем в пространстве H_α среди всех универсальных алгоритмов (3) искать универсально-оптимальный алгоритм

$$u_{n+1, \alpha}^0 = u_0 + P_{n, \alpha}^0(A) [f - Au_0], \quad (4)$$

т. е. такой, что

$$\|u_{n+1, \alpha}^0 - u\|_\alpha \leq \|u_{n+1, \alpha} - u\|_\alpha. \quad (5)$$

Такой алгоритм всегда существует. Мы построим итерационные процессы, которые в шкале пространств $\{H_\alpha\}$, порожденной фиксированным самосопряженным положительно-определенным оператором A , будут универсально-оптимальными по порядку. Итерационный процесс

$$v_{n+1}^0 = v_0 + P_n^0(A) [f - Av_0] \quad (6)$$

будем называть оптимальным по порядку в пространстве H_α , если

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\|u - v_{n+1}^0\|_\alpha}{\|u - u_{n+1, \alpha}^0\|_\alpha} < \infty. \quad (7)$$

Итерационный процесс (6) будем называть универсально-оптимальным по порядку в шкале пространств $\{H_\alpha\}$, если соотношение (7) выполняется для любого α .

Отметим, что содержание этой заметки подсказано проблематикой теории кубатурных формул (см. также (5, 6)).

2°. Итак, пусть в гильбертовом пространстве H дан класс операторных уравнений (1) с самосопряженными положительно-определенными операторами, спектр которых заключен в промежутке $[m, M]$ ($0 < m < M$). Очевидно, $u - u_{n,\alpha} = [E - P_{n-1,\alpha}(A) \cdot A](u - u_0)$ (E означает единственный оператор). Значит,

$$\|u - u_{n,\alpha}\|_{\alpha}^2 = (A^{\alpha}(E - P_{n-1,\alpha}(A) \cdot A)(u - u_0), (E - P_{n-1,\alpha}(A) \cdot A)(u - u_0)). \quad (8)$$

Тогда из спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (1) следует, что

$$\|u - u_{n,\alpha}\|_{\alpha}^2 = \int_m^M \lambda^{\alpha} (1 - \lambda P_{n-1,\alpha}(\lambda))^2 dv(\lambda), \quad (9)$$

где

$$v(\lambda) = (\varepsilon_{\lambda}(u - u_0), (u - u_0)), \quad (10)$$

а ε_{λ} — проекционный оператор, спектральная функция оператора A . Представим многочлен $P_{n-1,\alpha}(\lambda)$ степени $n-1$ в следующем виде:

$$P_{n-1,\alpha}(\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} c_{m,\alpha} p_{m,\alpha}(\lambda), \quad (11)$$

где $p_{m,\alpha}(\lambda)$ — полиномы m -й степени со старшим коэффициентом, равным единице, ортогональные по весу $\lambda^{\alpha+2}$ в промежутке $[m, M]$

$$\int_m^M \lambda^{\alpha+2} p_{m,\alpha}(\lambda) p_{l,\alpha}(\lambda) dv(\lambda) = 0, \quad l \neq m. \quad (12)$$

Таким образом, в силу (9),

$$\|u - u_{n,\alpha}\|_{\alpha}^2 = \int_m^M \lambda^{\alpha} \left[1 - \lambda \sum_{m=0}^{n-1} c_{m,\alpha} p_{m,\alpha}(\lambda) \right]^2 dv(\lambda). \quad (13)$$

Отсюда ясно, что коэффициенты оптимального полинома $P_{n-1,\alpha}^0$, с помощью которого образуется оптимальный итерационный процесс, находятся по формулам

$$c_{m,\alpha}^0 = \frac{\int_m^M \lambda^{\alpha+1} p_{m,\alpha}(\lambda) dv(\lambda)}{\int_m^M \lambda^{\alpha+2} p_{m,\alpha}(\lambda) dv(\lambda)}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (14)$$

То, что $c_{m,\alpha}^0$ действительно дают точку минимума, следует, например, из критерия Сильвестра. Выясним прежде всего вопросы, связанные со сходимостью.

Теорема 1. Если уравнения (1) разрешимы, то универсально-оптимальный итерационный процесс (4) сходится при любом начальном приближении u_0 , причем имеют место следующие оценки:

$$\|u - u_{n,\alpha}^0\|_{\alpha} \leq 2M^{\alpha/2} \|u - u_0\|_0 \left(\frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} \right)^n, \quad \alpha \geq 0, \quad (15)$$

$$\|u - u_{n,\alpha}^0\|_{\alpha} \leq 2m^{\alpha/2} \|u - u_0\|_0 \left(\frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} \right)^n, \quad \alpha < 0. \quad (16)$$

Докажем вначале сходимость оптимального процесса в случае $\alpha=0$. Пусть $u_{n,0}^0 = u_0 + P_{n-1,0}^0(A)[f - Au_0]$ — оптимальный итерационный процесс в H_0 . Построим мажорантный процесс $u_{n,0}^* = u_0^* + P_{n-1,0}^*(A)[f -$

— Au_0], причем полином $P_{n-1,0}^*(\lambda)$ выберем таким образом, чтобы полином $Q_n(\lambda) = 1 - \lambda P_{n-1,0}^*(\lambda)$ наименее уклонялся от нуля на отрезке $[m, M]$.

Известно, что среди всех полиномов $Q_n(\lambda)$ степени n , нормированных условием $Q_n(0) = 1$, наименее уклоняется от нуля в промежутке $[m, M]$ многочлен

$$R_n(\lambda, m, M) = \frac{T_n((2\lambda - M - m)/(M - m))}{T_n(-(M + m)/(M - m))}$$

($T_n(\lambda)$ — многочлен Чебышева первого рода степени n). Поэтому

$$\|u - u_{n,0}^0\|_0^2 \leq \|u - u_{n,0}^*\|_0^2 = \int_m^M |R_n(\lambda, m, M)|^2 d\nu(\lambda) \leq \max_{\lambda \in [m, M]} |R_n(\lambda, m, M)|^2 \times \\ \times \|u - u_0\|_0^2, \quad (17)$$

Далее, поскольку

$$\max_{\lambda \in [m, M]} |R_n(\lambda, m, M)| \leq \frac{2(1 - m/M)^n}{1 - \sqrt{m/M}^{2n} + (1 - \sqrt{m/M})^{2n}} \leq 2 \left(\frac{1 - \sqrt{m/M}}{1 + \sqrt{m/M}} \right)^n,$$

из (17) следует, что

$$\|u - u_{n,0}^0\|_0 \leq 2 \|u - u_0\|_0 ((\sqrt{M} - \sqrt{m})^n / (\sqrt{M} + \sqrt{m}))^n.$$

Таким образом, для случая $\alpha = 0$ теорема доказана.

Переходя к общему случаю, видим, что сходимость универсальнооптимального итерационного процесса (4) и соответствующие оценки легко следуют из неравенств

$$\|u\|_\alpha \leq M^{\alpha/2} \|u\|_0, \quad \alpha \geq 0, \\ \|u\|_\alpha \leq m^{\alpha/2} \|u\|_0, \quad \alpha < 0.$$

Найдем теперь итерационные процессы универсально-оптимальные по порядку в шкале пространств $\{H_\alpha\}$, порожденной самосопряженным положительно-определенным оператором A .

Теорема 2. *Любой итерационный процесс оптимальный в каком-либо пространстве шкалы $\{H_\alpha\}$ будет универсально-оптимальным по порядку во всей шкале.*

Пусть H_β — произвольное пространство шкалы и

$$u_{n,\beta}^0 = u_0 + P_{n-1,\beta}^0(A) [f - Au_0]$$

оптимальный итерационный процесс в этом пространстве. И пусть

$$u_{n,\alpha}^0 = u_0 + P_{n-1,\alpha}^0(A) [f - Au_0] \quad (18)$$

оптимальный процесс в пространстве H_α . Покажем, что (18) будет оптимальным по порядку процессом в пространстве H_β . В самом деле, в силу очевидного неравенства

$$m^{(\beta-\alpha)/2} \|u\|_\alpha \leq \|u\|_\beta \leq M^{(\beta-\alpha)/2} \|u\|_\alpha$$

(мы для определенности считаем, что $\beta > \alpha$)

$$\|u - u_{n,\alpha}^0\|_\beta \leq M^{(\beta-\alpha)/2} \|u - u_{n,\alpha}^0\|_\alpha \leq \\ \leq M^{(\beta-\alpha)/2} \|u - u_{n,\beta}^0\|_\alpha \leq \left(\frac{M}{m} \right)^{(\beta-\alpha)/2} \|u - u_{n,\beta}^0\|_\beta.$$

Таким образом,

$$1 \leq \frac{\|u - u_{n,\alpha}^0\|_\beta}{\|u - u_{n,\beta}^0\|_\beta} \leq \left(\frac{M}{m} \right)^{(\beta-\alpha)/2},$$

откуда в силу произвольности β следует наша теорема.

Поскольку полиномы $p_{m,\alpha}(\lambda)$ удовлетворяют известному в теории ортогональных многочленов (см. (2)) рекуррентному соотношению

$$p_{m,\alpha}(\lambda) = (\lambda - a_{m-1,\alpha})p_{m-1,\alpha}(\lambda) - b_{m-2,\alpha}p_{m-2,\alpha}(\lambda),$$

то для рассматриваемого класса итерационных процессов можно дать простую и удобную вычислительную схему. Эта схема аналогична другим схемам, использующим рекуррентные соотношения (2, 3). Коэффициенты $c_{m,\alpha}$, $a_{m-1,\alpha}$, $b_{m-2,\alpha}$ выражаются через известные величины, определяемые по ходу итерационного процесса.

Замечание. Если в уравнении (1) оператор не самосопряженный, то можно перейти к эквивалентному уравнению

$$A^*Au = A^*f$$

с самосопряженным оператором (4).

3°. Приведенные выше общие соображения могут быть применены к решению разнообразных задач алгебры и анализа. Мы приведем здесь лишь один пример. Именно в области Ω с гладкой границей S рассмотрим краевую задачу

$$Lu = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + c(x)u = f(x), \quad (19)$$

$$u|_S = 0. \quad (20)$$

Считаем, что $a_i(x) \in C'(\Omega)$, $c(x), f(x) \in C(\Omega)$, и $a_i(x) > 0$, $c(x) \geq 0$ в Ω . Перейдем от уравнения (19) к уравнению

$$Ku = -\Delta^{-1}Lu = g, \quad g = -\Delta^{-1}f(x).$$

Взяв за основное пространство $\dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ С. Л. Соболева, легко показать, что K — самосопряженный оператор и в силу теорем вложения

$$m(u, u) \leq (Ku, u) \leq M(u, u) \quad (0 < m < M < \infty).$$

Поэтому в данном случае применимы все изложенные выше соображения. Вычислительная схема универсально-оптимального процесса позволяет свести решение краевой задачи для общего эллиптического уравнения второго порядка к решению последовательности уравнений Пуассона.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
7 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, 1959. ² Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, 1963. ³ В. Е. Шиманский, Методы численного решения краевых задач, ч. 1, Киев, 1963. ⁴ М. А. Красносельский, Г. М. Вайнник и др., Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1969. ⁵ Г. И. Марчук, Ю. Л. Кузнецов, ДАН, 181, № 6 (1968). ⁶ E. Steifel, Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser., 49, 1 (1958).