Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 6

УДК 533.95 ГИДРОМЕХАНИКА

В. Е. ЗАХАРОВ, Е. А. КУЗНЕЦОВ

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

(Представлено академиком Р. З. Сагдеевым 22 XII 1969)

Б. И. Давыдовым [1] сформулирован вариационный принцип для гидродинамики идеальной жидкости и показано, что каноническими переменными являются пары (λ, μ) и (ρ, Φ), где

$$\mathrm{v} = \frac{\lambda}{\rho} \nabla\mu + \nabla\Phi.$$

В настоящей работе аналогичная задача решена для магнитной гидродинамики идеальной жидкости (м.г.д.).

Рассмотрим уравнения м.г.д.:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{v} + (\mathrm{v}\nabla)\,\mathrm{v}\right) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \mathbf{H}]; \tag{1}$$

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\,\rho\mathrm{v} = 0; \tag{2}$$

$$\partial\mathbf{H}/\partial t = \mathrm{rot}\,[\mathrm{v}, \mathbf{H}]; \tag{3}$$

$$\omega = \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\varepsilon) = \int dp/\rho.$$

Здесь ω — энтальпия, ε — внутренняя энергия.

Произведем замену переменных:

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\rho}[\mathbf{H},\ \mathrm{rot}\,\mathbf{S}] + \nabla\Phi. \tag{4}$$

При любых ρ, **v**, **H** из формулы (4) можно восстановить **S** и Φ, причем неоднозначно, с точностью до прибавления к Φ скаляра Φ_0, к **S** — вектора $\mathbf{S}_0$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{\rho}[\mathbf{H}, \mathrm{rot}\,\mathbf{S}_0] + \nabla\Phi_0 = 0.$$

После подстановки формулы (4) в уравнение (1) получим

$$\nabla\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\mathrm{v}\nabla)\,\Phi - \frac{\mathrm{v}^2}{2} + \omega(\rho)\right\} + \left[\frac{\mathbf{H}}{\rho},\ \mathrm{rot}\left\{\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} - [v, \mathrm{rot}\,\mathbf{S}] + \frac{\mathbf{H}}{4\pi}\right\}\right] = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (v\nabla)\,\Phi - \frac{\mathrm{v}^2}{2} + \omega(\rho) = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} + \frac{\mathbf{H}}{4\pi} - [\mathrm{v},\ \mathrm{rot}\,\mathbf{S}] + \Delta\Psi = 0 \tag{7}$$

вместе с уравнениями (2), (3). В уравнении (7) Ψ — произвольная функция координат и времени.

В силу формулы (5) любое решение системы (2), (3), (6), (7) порождает некое решение системы уравнений м.г.д. (1)—(3). В предположении о единственности решения Коши для системы (1)—(3) и системы (2), (3), (6), (7) верно и обратное — любому решению системы (1) — (3) можно сопоставить некий класс решений системы (2), (3), (6), (7). Для этого достаточно по набору значений $\mathbf{v}$, $\mathbf{H}$, ρ в некоторый момент времени t_0 построить всевозможные наборы величин $\mathbf{S}$, Φ, удовлетворяющих формуле (4), и взять их в качестве начальных условий для (2), (3), (6), (7).

Таким образом, система уравнений (2), (3), (6), (7) эквивалентна системе уравнений м.г.д.

Выберем Ψ таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{S} = 0. \tag{8}$$

Очевидно, это дает

$$\Psi = +\frac{1}{\Delta}\operatorname{div}[\mathbf{v},\ \operatorname{rot}\mathbf{S}] + \Psi_0,$$

где Ψ_0 — произвольное решение уравнения Лапласа $\Delta\Psi_0 = 0$. В частном случае, когда при $|\mathbf{r}| \to \infty$, $\mathbf{v} \to 0$, $\rho \to \rho_0$, $\mathbf{H} \to \mathbf{H}_0$, величину Ψ_0 удобно выбрать так, чтобы $\partial\mathbf{S}/\partial t \to 0$ при $|\mathbf{r}| \to \infty$. Очевидно, тогда $\Psi_0 = -\frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}_0,\ \mathbf{r})$.

Рассмотрим функционал

$$E = \int\left\{\rho\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\varepsilon + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \Psi\operatorname{div}\mathbf{H}\right\}d\mathbf{r}. \tag{9}$$

Непосредственным варьированием этого функционала убеждаемся, что уравнения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta\Phi};\quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta\rho};\quad \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta s};\quad \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial\mathbf{H}} \tag{10}$$

совпадают с уравнениями (2) (6), (3), (8). Таким образом, переменные $(\rho,\ \Phi)$ и $(\mathbf{H},\ \mathbf{S})$ являются парами канонически сопряженных величин, а функционал E — гамильтонианом.

Введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int\left\{\left(\mathbf{S},\ \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) + \Phi\frac{\partial\rho}{\partial t}\right\}d\mathbf{r} - E$$

и построим функционал действия

$$S = \int\mathcal{L}\,dt,$$

минимизация которого задает вариационный принцип для уравнений м.г.д. Заметим, что для реального движения $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, и функционал E совпадает с полной энергией жидкости.

В случае несжимаемой жидкости величина Φ исключается с помощью уравнения непрерывности

$$\Delta\Phi = -\operatorname{div}\frac{1}{\rho_0}[\mathbf{H},\ \operatorname{rot}\mathbf{S}].$$

Каноническими переменными являются $(\mathbf{H},\ \mathbf{S})$, а гамильтониан имеет вид

$$E = \int\left\{\frac{\rho_0\mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \Psi\operatorname{div}\mathbf{H}\right\}d\mathbf{r}.$$

Поступило
27 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. И. Давыдов, ДАН, 69, № 2, 165 (1949).