

Е. М. БЕНИАМИНОВ

О ГОМОЛОГИЯХ ДЕЕВЕЛЯ МЕТРИЧЕСКИХ КОМПАКТОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 27 IV 1970)

Пусть X — топологическое пространство.

Определение. Копредпучком абелевых групп (или модулей) с базой X называют ковариантный функтор из категории открытых множеств пространства X в категорию абелевых групп (или модулей).

Пусть A — копредпучок с базой X . Обозначим через $\check{H}_*(X; A)$ гомологии Александрова — Чеха, получающиеся как обратный предел гомологий открытых покрытий пространства X с коэффициентами в A ⁽⁵⁾. Как известно, существенным недостатком гомологий Александрова — Чеха, затрудняющим их применение, является отсутствие точности в гомологической последовательности пары или в гомологической последовательности, отвечающей точной тройке коэффициентов.

Принципиально другой подход к определению гомологий, учитывающий производные функторы функтора проективного (обратного) предела, дан в работе Деевеля ⁽⁴⁾. Основные конструкции Деевеля даны, однако, не в категории топологических пространств, а в категории упорядоченных множеств. Это приводит к затруднениям при выяснении их природы в конкретных категориях топологических пространств и связи с другими теориями (например, с обычными гомологиями в категории некомпактных полиэдров). Однако в одном случае, а именно, в категории метрических компактов, автор показывает, что для постоянных коэффициентов его гомологии изоморфны гомологиям Стинрода * ⁽⁴⁾. Гомологии Деевеля удовлетворяют требованию точности; всякой точной тройке копредпучков над X

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$$

отвечает точная последовательность гомологий

$$\dots \rightarrow H_n(X; A_1) \rightarrow H_n(X; A_2) \rightarrow H_n(X; A_3) \rightarrow H_{n-1}(X; A_1) \rightarrow \dots$$

Гомологии Деевеля могут быть определены следующим способом. Пусть $\Gamma(C_*)$ — инъективная резольвента некоторого спектра C_* цепных комплексов открытых покрытий пространства X с коэффициентами в копредпучке A . Тогда $H_n(X; A) = H_n(\varprojlim I^*(C_*))$, где $\varprojlim I^*(C_*)$ рассматривается как двойной комплекс. Такой подход позволяет получить некоторые дальнейшие свойства гомологий Деевеля метрических компактов с коэффициентами в копредпучках.

Из рассмотрения спектральной последовательности двойного комплекса $\varprojlim I^*(C_*)$ вытекает следующая теорема, дающая соотношение между гомологиями Деевеля и гомологиями Александрова — Чеха.

* С точностью до индексов, так как гомологии Стинрода, определяемые как n -мерные, оказываются $(n-1)$ -мерными (и совпадают с обычными в категории компактных полиэдров). Позже Борелем и Муром ⁽³⁾ точная теория гомологий была построена в категории локально компактных пространств. Как показано в ⁽²⁾ (где дано описание точной теории гомологий с постоянными коэффициентами, идущей от Стинрода), гомологии Бореля — Мура изоморфны гомологиям Стинрода (с учетом ошибки в индексе) в категории компактов при дополнительном ограничении, что модуль коэффициентов имеет конечное число образующих (без этого ограничения она не вполне корректна, см. ⁽²⁾, стр. 94 и 109).

Теорема 1. Пусть X — метрический компакт, A — копредпучок с базой X . Тогда при всех n существуют точные последовательности

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow \{\mathfrak{M}\}}^{(1)} H_{n+1}(\mathfrak{M}; A) \rightarrow H_n(X; A) \xrightarrow{\varphi} \check{H}_n(X; A) \rightarrow 0,$$

естественные по A , где через $\lim_{\leftarrow \{\mathfrak{M}\}}(\cdot)$ обозначен первый производный функтор функтора предела $\lim_{\leftarrow \{\mathfrak{M}\}}(\cdot)$, рассматриваемого по направленному множеству $\{\mathfrak{M}\}$ всех открытых покрытий пространства X (о производных функторах функтора проективного предела см. ⁽⁶⁾).

В случае постоянных коэффициентов эта теорема была сформулирована Роосом ⁽⁶⁾.

Следствие 1. Если A — копредпучок компактных абелевых групп или конечномерных векторных пространств, то $H_*(X; A) = \check{H}_*(X; A)$.

Следствие 2. Для любого копредпучка абелевых групп (или модулей) A группы гомологий $H_n(X; A) = 0$ при $n < -1$. Если A — постоянный копредпучок, то $H_{-1}(X; A) = 0$.

Следствие 3. Если X — метрический компакт размерности k , то $H_n(X; A) = 0$ при $n > k$ и $H_k(X; A) = \check{H}_k(X; A)$.

Из рассмотрения второй спектральной последовательности двойного комплекса $\lim_{\leftarrow} I^*(C_*)$ вытекает следующий результат.

Теорема 2. Пусть X — метрический компакт, $\{\mathfrak{M}_n, p_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ — измельчающийся спектр открытых покрытий метрического компакта ($\mathbb{Z}^+$ — натуральные числа), A — копредпучок с базой X . Тогда существует точная последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_k(\lim_{\leftarrow n} C_*(\mathfrak{M}_n; A)) \rightarrow H_k(X; A) \rightarrow H_{k+1}(\lim_{\leftarrow n} C_*(\mathfrak{M}_n; A)) \rightarrow \\ \rightarrow H_{k-1}(\lim_{\leftarrow n} C_*(\mathfrak{M}_n; A)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

естественная по A , где $C_*(\mathfrak{M}_n; A)$ — комплекс цепей покрытия $\mathfrak{M}_n$ с коэффициентами в A .

В случае постоянных коэффициентов $\lim_{\leftarrow n}^{(1)} C_*(\mathfrak{M}_n; A) = 0$, поэтому теорема 2 дает изоморфизм гомологий Деевеля гомологиям, рассмотренным в ⁽²⁾.

Следующая теорема говорит о том, что в том случае, когда X — метрический компакт без изолированных точек, гомологии Деевеля являются универсальным расширением гомологий Александрова — Чеха среди гомологий, удовлетворяющих условию точности и некоторым другим естественным требованиям.

Теорема 3. Пусть $\bar{H}_*(X; \cdot)$ — любая теория гомологий с коэффициентами в копредпучках абелевых групп, определенная на метрическом компакте X без изолированных точек и удовлетворяющая условию точности. Предположим, что $H_{-1}(X; A) = 0$ для любого копредпучка компактных абелевых групп A . Тогда, если имеется естественное преобразование гомологий $f: \bar{H}_*(X; \cdot) \rightarrow \check{H}_*(X; \cdot)$, то существует единственное естественное преобразование $\bar{f}: \bar{H}_*(X; \cdot) \rightarrow H_*(X; \cdot)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_*(X; \cdot) & \xrightarrow{\varphi} & \check{H}_*(X; \cdot) \\ & \nwarrow \bar{f} \nearrow & \\ & \bar{H}_*(X; \cdot) & \end{array}$$

Теорема 3 верна также для любых конечномерных компактов (возможно с изолированными точками).

Общеизвестно, что когомологии Александрова — Чеха с коэффициентами в предпучках абелевых групп (или модулей) являются правыми про-

изводными функторами функтора $H^0(X; \cdot)$. Аналогичная теорема имеет место для гомологий Деевеля.

Теорема 4. Пусть X — метрический компакт без изолированных точек. Тогда гомологии Деевеля $H_n(X; \cdot)$, $n = -1, 0, 1, 2, \dots$, с коэффициентами в копредпучках абелевых групп (или модулей) изоморфны $(n+1)$ -м производным функторам функтора $H_{-1}(X; \cdot)$.

Следующая теорема показывает, что утверждения следствий 1, 3 и требование точности полностью определяют гомологии Деевеля на конечномерных компактах.

Теорема 5. Пусть X — конечномерный метрический компакт. Пусть $\bar{H}_*(X; \cdot)$ — точная теория гомологий с коэффициентами в копредпучках абелевых групп, совпадающая с теорией гомологий Александрова — Чеха на полной подкатегории, объектами которой являются копредпучки компактных абелевых групп. Предположим, кроме того, $\bar{H}_n(X; \cdot) = 0$ для всех достаточно больших n . Тогда теория $\bar{H}_*(X; \cdot)$ изоморфна теории гомологий $H_*(X; \cdot)$.

Для гомологий Деевеля имеют место результаты, являющиеся аналогами теорем о спектральной последовательности непрерывного отображения и спектральной последовательности покрытия в случае когомологий с коэффициентами в предпучках ⁽¹⁾.

Пусть $\pi: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение метрических компактов, A — копредпучок с базой X . Обозначим через $\mathcal{H}_q(F; A)$ копредпучок с базой Y , который каждому открытому множеству v сопоставляет группу $H_q(X; A^{\pi^{-1}(v)})$, где $A^{\pi^{-1}(v)}$ — копредпучок с базой X , задаваемый соотношением $A^{\pi^{-1}(v)}(U) = A(U \cap \pi^{-1}(v))$.

Теорема 6. Существует спектральная последовательность, у которой $E_r = H_q(Y; \mathcal{H}_q(F; A))$, а член E^∞ ассоциирован с гомологиями $H_*(X; A)$ при подходящей фильтрации.

Пусть $\mathfrak{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ — конечное открытое покрытие метрического компакта X , A — копредпучок с базой X . Для всякого конечного подмножества $S \subset I$ обозначим через M_S множество $\bigcap_{i \in S} M_i$. Рассмотрим на нерве покрытия $\mathfrak{M}$ систему коэффициентов $\mathcal{H}_q(A): S \rightarrow H_q(X; A^{M_S})$, где A^{M_S} — копредпучок с базой X , задаваемый соотношением $A^{M_S}(U) = A(U \cap M_S)$.

Теорема 7. Существует спектральная последовательность, для которой $E_{p,q}^2 = H_p(\mathfrak{M}; \mathcal{H}_q(A))$, а член E^∞ ассоциирован с гомологиями $H_*(X; A)$.

Следствие 4. Пусть $\mathfrak{M} = \{M_i\}_{i \in I}$ — конечное открытое покрытие метрического компакта X , A — копредпучок с базой X . Если $H_q(X; A^{M_S}) = 0$ для $q \neq 0$ и для любого симплекса S нерва покрытия, то $H_n(\mathfrak{M}; \mathcal{H}_0(A)) = H_n(X; A)$.

Выражаю большую благодарность Е. Г. Склиренко за оказанную помощь.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Годеман, Алгебраическая топология и теория пучков, М., 1961. ² Е. Г. Склиренко, УМН, 24, 5, 87 (1969). ³ A. Borel, J. C. Moore, Michigan Math. J., 7, № 2, 137 (1960). ⁴ R. Deheuvels, Bull. Soc. Math. France, 90, № 2, 261 (1962). ⁵ E. Luft, Bonn Math. Schr., № 8, 41 (1959). ⁶ J. E. Roos, C. R., 252, № 24, 3702 (1961).