Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 1

УДК 513.821.838

МАТЕМАТИКА

В. А. ЕФРЕМОВИЧ, Э. А. ЛОГИНОВ, Е. С. ТИХОМИРОВА

ЭКВИМОРФИЗМЫ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 23 VI 1970)

При исследовании свойств эквиморфизмов естественно прежде всего изучить их поведение в бесконечности. Особый интерес представляют те эквиморфизмы, которые по непрерывности продолжаются на абсолют и там дают топологическое отображение. Такие эквиморфизмы назовем стабильными (конечно, здесь этот термин употреблен совсем в ином смысле, чем когда говорят о стабильных гомеоморфизмах). Если все эквиморфизмы многообразия $\mathcal{M}$ стабильны, то само $\mathcal{M}$ назовем стабильным *.

Для полного риманова многообразия абсолют (бесконечно удаленная сфера) может быть построен по-разному. Так, наиболее общая постановка вопроса об абсолюте полного риманова многообразия $\mathcal{M}$, предполагаемого неограниченным, вероятно, может быть сформулирована следующим образом: строится ограниченное многообразие M (уже неполное), гомеоморфное $\mathcal{M}$. Его пополнение $\overline{M}$ приведет нас к абсолюту U: $U = \overline{M} \setminus M$. Конечно, такое решение слишком неоднозначно. Неоднократно предполагались различные варианты этого пути. Так, R. Penrose [1] рассматривает $\overline{M}$ как конформный образ $\mathcal{M}$ и интересуется лишь конформно инвариантными свойствами $\overline{M}$. Другой подход к той же задаче был предложен В. А. Ефремовичем и Е. С. Тихомировой в [2, 3]. При этом $\overline{M}$ рассматривается как многообразие с краем, служащее компактификацией гладкой топологической структуры многообразия $\mathcal{M}$. В некоторых случаях (например, для односвязного $\mathcal{M}$) такая компактификация единственна. Возможны и иные подходы, к чему мы надеемся еще вернуться в следующих публикациях.

В этой заметке дается достаточный признак стабильности некоторого класса римановых многообразий.

1. Пусть в неограниченном римановом n-мерном многообразии $\mathcal{M}$ можно выделить при помощи гладкой замкнутой поверхности Σ (возможно, состоящей из нескольких компонент) ограниченную часть Q таким образом, что, обозначив σ^i, $i = 1, \ldots, n-1$, локальные координаты точки $\sigma \in \Sigma$, можно однозначно задать любую точку $x \in \mathcal{M} \setminus Q$ координатами ρ, σ, где ρ — расстояние σx, $\sigma \in \Sigma$, причем элемент длины ds в $\mathcal{M} \setminus Q$ определяется формулой $ds^2 = d\rho^2 + g_{ik} d\sigma^i d\sigma^k$, $g_{ik} = g_{ik}(\rho, \sigma)$ — гладкие функции от ρ и σ. Будем называть σ проекцией точки x. При этих условиях абсолютом служит некоторая поверхность U, гомеоморфная Σ.

Спрямляемый путь $x = x(s)$, $0 \leqslant s < +\infty$, где за параметр s принята длина дуги, назовем λ-путем, если существует такое $l > 0$, что для любых двух его точек $x_1 = x(s_1)$, $x_2 = x(s_2)$, для которых $x_1 x_2 \geqslant l$, отношение $(s_2 - s_1) / x_1 x_2 \leqslant \lambda$. Из этого определения немедленно следует, что точка $x(s)$ стремится к бесконечности при $s \to \infty$.

* Пример — пространство Лобачевского; эвклидово пространство E^n, $n > 1$, не стабильно.

Т е о р е м а 1. *Если* $\int\limits^{+\infty} \frac{d\rho}{\mu(\rho)}$ *сходится, где*

$$\mu(r) = \inf_{\rho \geqslant r} \sqrt{g_{ik}(\rho, \sigma) \frac{d\sigma^i}{d\sigma} \frac{d\sigma^k}{d\sigma}},$$

а $d\sigma = \sqrt{g_{ik}(0, \sigma)\, d\sigma^i d\sigma^k}$ *— элемент длины на* Σ, *то всякий* λ*-путь имеет асимптотическое направление. Здесь под асимптотическим направлением пути* $x = x(s)$ *понимается направление луча* $\sigma = \sigma_\infty$, *где* σ_∞ *— предел проекции точки* $x(s)$ *при* $s \to \infty$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в ([4]).

Введя обозначение $M(r) = \max\limits_{\sigma \in \Sigma} \sqrt{g_{ik}(r, \sigma) \frac{d\sigma^i}{d\sigma} \frac{d\sigma^k}{d\sigma}}$ можно сформулировать следующее предложение.

Т е о р е м а 2. *Если в* $\mathscr{M} \setminus Q$ *произведение* $M(r) \int\limits_r^\infty \frac{d\rho}{\mu(\rho)}$ *ограничено сверху константой* C, *то всякий* λ*-путь* Γ *ограниченно отклоняется от асимптотического луча* $\sigma = \sigma_\infty$.

Л е м м а 1. *Из условия теоремы 2 следует, что* $\Delta s / \Delta\rho$ *при* $\Delta\rho \geqslant l$ *ограничено для данного* λ*-пути.*

Для доказательства рассмотрим гиперповерхности Σ_N: $\rho = Nl$, где l — положительное число из определения λ-пути, $N = 1, 2, \ldots$ Назовем s_N наименьшее значение параметра s такое, что $\rho(s) > Nl$ при $s > s_N$. Тем самым Γ точками $x_N = x(s_N)$ разбивается на дуги $\Gamma_N = x_N x_{N+1}$, $\Delta s = {}$ $= s_{N+1} - s_N$ ограничено, так как $\Delta s \leqslant \lambda x_N x_{N+1} < \lambda(2h + l + M_{(N-h)}\Delta\sigma)$, где h — любое положительное меньшее $\rho(s_N)$ значение, которое далее можно считать равным $2\lambda C$. Тогда, приняв во внимание, что $\Delta\sigma \leqslant \Delta s / \mu_{(Nl)}$ и что $M_{(Nl-h)} / \mu_{(Nl)} < C / h$, получим $\Delta s < \lambda(2h + l + M_{(Nl-h)} / \mu_{(Nl)}$, т. е. $\Delta s < b = 2\lambda(4\lambda C + l)$. Теперь после несложных вычислений можно показать, что отношение $\Delta s / \Delta\rho$ для любого $\Delta\rho$, кратного l, ограничено, а затем и для любого $\Delta\rho \geqslant l$, причем ограничивающая константа может быть, например, взята равной $c = b^2 / l^2 + 4b / l$, т. е. зависит только от C, λ и l. Это справедливо для всех λ-путей, что следует из хода доказательства, если каждый λ-путь считать начинающимся в точке, ближайшей к Σ.

Ниже понадобится

Л е м м а 2. *Если* f, g, r, μ *— непрерывные неотрицательные функции положительного аргумента, причем* r *— функция с ограниченным изменением, а* μ *не убывает, то из неравенства* $\int\limits_{t_0}^{T} f(r(t))\, dr(t) - g(t)\, dt \geqslant 0$, *справедливого для любого* T, *большего некоторого фиксированного* $t_1 \geqslant 0$, *вытекает существование такого* $t_* \in [t_0, t_1]$, *что* $\int\limits_{t_*}^{T} \frac{f(r)\, dr(t) - g(t)\, dt}{\mu(r(t))} \geqslant 0$ *для любого* $T \geqslant t_1$, *в частности, для* $T = +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть Γ — та часть λ-пути, которая целиком лежит в $\mathscr{M} \setminus Q$. По лемме 1 для $\Delta\rho \geqslant l$ $\Delta s / \Delta\rho \leqslant c$. Поэтому, если $\Delta s \geqslant cl$, то $\Delta\rho \geqslant l$, так как если бы было $\Delta\rho < l$, то, взяв дугу, вмещающую данную, но для которой $\Delta\rho = l$, пришли бы к противоречию. Итак, для $\Delta s \geqslant cl$ имеем $c\Delta\rho \geqslant \Delta s$, или $\int c\, d\rho - ds \geqslant 0$, где интеграл берется по любой дуге длины $\Delta s \geqslant cl$. Применяя лемму 2, заметим, что на каждой дуге длины cl найдется точка x_*, соответствующая значению s_*

натурального параметра, такая, что $\int\limits_{s_*}^{\infty} \frac{ds}{\mu(r(s))} \leqslant c \int\limits_{\rho_*}^{\infty} \frac{d\rho}{\mu(\rho)}$, где ρ_* — расстояние x_* от Σ. (Здесь функции f и g постоянны: $f = c$, $g = 1$.) Так как длина проекции $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_* \leqslant \int\limits_{s_*}^{s_1} \frac{ds}{\mu(r(s))}$ и, в частности, $\sigma_\infty - \sigma_* \leqslant$

$\leqslant \int\limits_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{\mu}$, а расстояние d_* точки x_* от асимптотического луча $\sigma = \sigma_*$

меньше $(\sigma_\infty - \sigma_*) M_{(\rho_*)}$, то $d_* \leqslant M_{(\rho_*)} c \int\limits_{\rho_*}^{\infty} \frac{d\rho}{\mu(\rho)} \leqslant Cc$. Следовательно, расстояние d уже для любой точки $x \in \Gamma$ будет ограничено константой $Cc + cl$.

2. Образ прямолинейного луча. Пусть $f\colon\ G' \to G$ — эквиморфизм геодезического пространства G' на геодезическое пространство G, и Γ' — прямолинейный луч в G' (это значит, что длина любой дуги на Γ' равна расстоянию между ее концами).

Теорема 3. *Образ Γ прямолинейного луча Γ' не более чем на единицу отклоняется от некоторого λ-пути, причем λ — фиксированная константа, зависящая лишь от f.*

В качестве такого λ-пути можно взять бесконечнозвенную ломаную Π с единичными звеньями, вписанную в Γ так, что дуги последней между двумя последовательными вершинами x_i, x_{i+1} не содержат промежуточных точек x таких, что $x_i x \geqslant 1$. Действительно, пусть x, y — две любые точки из Π, и пусть $xy \geqslant l = 3$. Тогда, обозначив через s_{xy} длину куска $[x, y]$ ломаной между x и y, получим $s_{xy} \leqslant x_i x_{i+1} + \ldots + x_{k-1} x_k$, где x_i, x_k — ближайшие к x (соответственно y) вершины ломаной такие, что $[x, y] \subset$ $\subset [x_i, x_k]$. Так как в силу известного свойства эквиморфизмов (выполнение условия Липшица для расстояний $\geqslant 1$) и из неравенства $x_i x_k \geqslant 1$

имеем $x'_j x'_{j+1} \leqslant L_1 x_j x_{j+1}$, $x_i x_k \leqslant L_1 x'_i x'_k$, то $s_{xy} \leqslant s_{x_i x_k} \leqslant L_1 (x'_i x'_{i+1} + \ldots$ $\ldots + x'_{k-1} x'_k) = L_1 x'_i x'_k \leqslant L_1^2 x_i x_k \leqslant L_1^2 (xy + 2)$, т. е. $s_{xy} \leqslant \lambda xy$, где $\lambda =$ $= (1 + {}^2/_3) L_1^2$; таким образом, эта ломаная есть λ-путь $(l = 3)$, и Γ от нее отклоняется не более, чем на 1.

Теорема 4. *Если геодезическое пространство G эквиморфно отображено на многообразие $\mathscr{M}$, удовлетворяющее условию теоремы 2 (т. е. $M_{r'} \int\limits_{r}^{8} \frac{d\rho}{\mu(\rho)} \leqslant C$), то всякий прямолинейный луч на G при этом эквиморфизме переходит в криволинейный луч, имеющий асимптотическое направление и ограниченно отклоняющийся от асимптотического луча $\sigma = \sigma_\infty$.*

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 2 и 3.

3. Основная теорема 5. *Если риманово многообразие $\mathscr{M}$ удовлетворяет условию теоремы 2, то всякий эквиморфизм $f\colon\ \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ индуцирует на абсолюте топологическое отображение $\varphi\colon\ U \to U$. Более того, f вместе с φ определяет гомеоморфизм $\bar{f}$ многообразия $\overline{\mathscr{M}}$, пополненного бесконечно удаленными точками $\bar{f}\colon\ \overline{\mathscr{M}} \to \overline{\mathscr{M}}$. (Если угодно f, φ; $\bar{f}$ можно перенести на модель $\overline{M}$, $\bar{f}\colon\ \overline{M} \to \overline{M}$.)*

Доказательство. Поставим в соответствие каждой точке $u \in U$ точку $u' = \varphi(u)$ по следующему закону: координатный луч $\sigma = \text{const}$, ведущий в точку u, при эквиморфизме f переходит в криволинейный луч, ограниченно отклоняющийся от некоторого координатного луча $\sigma = \sigma'$. За u' мы и примем бесконечно удаленную точку этого луча. Отображение $u \to u'$ обратно однозначно: если бы две различные точки u_1, u_2 соответствовали одной и той же точке u', то образы координатных лучей точек u_1, u_2 ограниченно отклонялись бы от координатного луча точки u', значит, ограниченно отклонялись бы и друг от друга, что невозможно.

Непрерывность отображения $\bar{f}$ достаточно доказать в точках абсолюта. Пусть $x_n \to u$, $x_n \in \overline{M}$, $u \in U$. Если x_n' не стремится к u', то можно считать (перейдя к подпоследовательности), что $x_n' \to v' \neq u'$. Обозначим через Γ_n (соответственно Γ) координатный луч точки x_n (соответственно u). На каждом Γ_n выберем по точке y_n так, чтобы $\rho_{(y_n)} \to \infty$, а расстояние от y_n до Γ стремилось бы к нулю. Тогда расстояние от y_n' до Γ' также должно стремиться к нулю, но Γ' ограниченно отклоняется от координатного луча точки u'. А это невозможно, так как все Γ_n' ограниченно отклоняются от соответствующих асимптотических лучей, которые, по предположению, стремятся к координатному лучу точки v'.

Из обратной однозначности $\bar{f}$ и ее непрерывности вследствие компактности $\overline{\mathscr{M}}$ следует, что $\bar{f}$ — гомеоморфизм.

Замечание 1 (к теореме 2). Может показаться, что условие ограниченности произведения $M_{(r)}\int\limits_r^\infty \frac{d\rho}{\mu(\rho)}$ слишком сильно. Однако для одного важного частного случая оно и необходимо.

Теорема 6. *Если в части $\mathscr{M}\setminus Q$ нашего многообразия элемент длины задается формулой $ds^2 = d\rho^2 + f^2(\rho)d\sigma^2$, где $f(\rho)$ — монотонно стремящаяся к бесконечности функция, то необходимым условием ограниченности отклонения всякого λ-пути Γ от некоторого координатного луча $\sigma = \sigma_0(\Gamma)$ служит неравенство*

$$f(r)\int\limits_r^\infty \frac{d\rho}{f(\rho)} < C.$$

Замечание 2. Легко видеть, что в определении λ-пути постоянную l можно заменить единицей, изменив величину λ.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступило 23 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Пенроуз, Гравитация и топология, Сборн. статей, М., 1966, стр. 152. [2] В. Ефремович, Е. Тихомирова, Второй Всесоюзн. симпозиум по геометрии в целом, Петрозаводск, 1967. [3] В. Ефремович, Е. Тихомирова, Тез. кратких научных сообщений, Секция 9, Международн. матем. конгр., М., 1966. [4] В. Ефремович, Е. Тихомирова, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 5, 1139 (1964).