Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 1

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

И. Ф. КРАСИЧКОВ-ТЕРНОВСКИЙ

ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ НА ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 23 VII 1970)

Пусть G — односвязная область в комплексной плоскости C без бесконечно удаленной точки, H — локально выпуклое пространство функций, голоморфных в G, с топологией равномерной сходимости на компактах в G. Пусть s — линейный непрерывный функционал в H. Известно, что s допускает интегральное представление

$$s(f)=\int_D f(z)\,d\mu,\quad f\in H, \tag{1}$$

где μ — комплексная конечно-аддитивная мера ограниченной вариации, сосредоточенная на компакте $D\subset G$.

Отсюда следует, что функционал s можно применять не только к функциям из H, но и к достаточно малым сдвигам этих функций $f_h(z)=f(z+h)$. Рассмотрим оператор свертки $f\to s*f$, где $s*f=s(f(z+h))$ (s действует по z). Этот оператор линейно и непрерывно отображает H в пространство функций, голоморфных в некоторой достаточно малой окрестности начала, наделенное естественной топологией равномерной сходимости на компактах в этой окрестности. При условии $D\subset\{z\colon |z|\leqslant R\}\subset G$ оператор свертки можно представить в виде дифференциального оператора бесконечного порядка.

Рассмотрим однородное уравнение

$$s*f=0 \tag{2}$$

относительно $f\in H$.

Пусть $\varphi(h)=s(e^{hz})$ — характеристическая функция функционала s. Если λ есть нуль $\varphi(h)$ кратности n, то легко проверить, что экспоненциальные одночлены $e^{\lambda z}, ze^{\lambda z},\ldots, z^{n-1}e^{\lambda z}$ удовлетворяют (2). Решения такого типа называются ф у н д а м е н т а л ь н ы м и. Линейные комбинации фундаментальных решений и предельные функции последовательностей таких комбинаций, сходящихся в H, снова будут решениями (2). Возникает вопрос: верно ли, что любое решение $f\in H$ уравнения (2) можно аппроксимировать в топологии H линейными комбинациями фундаментальных решений? Несмотря на то, что эта задача в рамках дифференциальных уравнений бесконечного порядка исследуется уже давно ([1-7] и др.), ответ до сих пор в общем случае оставался неясным. Обзор результатов до 1936 г. приведен в статье [8], а до 1961 г.— в докладе А. Ф. Леонтьева [9]. Известные результаты, относящиеся к поставленной выше задаче, можно разбить на две категории. К первой категории относятся утверждения, которые предполагают сильные ограничения типа оценок снизу на характеристическую функцию $\varphi(h)$ (Диксон, Леонтьев). В результатах второй категории ограничения на характеристическую функцию более слабые, однако возможность аппроксимации доказывается не для всей области G, а для некоторой ее подобласти $g\subset G$, которая получается из G отступлением от ее границы; при этом чем слабее ограничение на характеристическую функцию, тем больше требуется отступать от границы (Валирон, Гельфонд, Диксон). В настоящей заметке анонсируется результат, не подходящий ни под одну из указанных категорий.

Аппроксимационная теорема. *Если G — выпуклая область, то любое решение $f \in H$ уравнения (2) можно аппроксимировать в топологии H линейными комбинациями фундаментальных решений. Если G — невыпуклая область, то аппроксимация, вообще говоря, невозможна.*

Наметим контуры доказательства.

Пусть $h(\theta)$ — опорная функция выпуклой области G и $H(\theta) = h(-\theta)$. Обозначим H^* сильное сопряженное к пространству H. Когда функционал S пробегает H^*, его характеристическая функция $\Phi(h) = S(e^{hz})$ пробегает класс P всех целых функций экспоненциального типа, индикаторы которых удовлетворяют условию $h_\Phi(\theta) < H(\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$. Обозначим через W множество всех решений $f \in H$ уравнения (2), а через W_0 — замкнутую в H линейную оболочку фундаментальных решений. Очевидно, что W, W_0 — замкнутые подпространства H и $W_0 \subset W$. Требуется доказать, что $W_0 = W$. По теореме Хана — Банаха для этого достаточно показать, что любой непрерывный линейный функционал, обращающийся в нуль на W_0, обращается в нуль на W. Пусть S — такой функционал и $\Phi(h) = S(e^{hz})$. Если λ есть нуль $\varphi(h) = s(e^{hz})$ кратности n, то $e^{\lambda z}, \ldots, z^{n-1}e^{\lambda z} \in W_0$ и S обращается в нуль на этих функциях. Отсюда следует, что φ делит Φ, т. е. $\Phi = l\varphi$, где l — целая функция.

В этом месте уместно сделать отступление от хода доказательства, чтобы рассмотреть специальный случай, когда G совпадает со всей комплексной плоскостью C. В этом случае P совпадает с классом всех целых функций экспоненциального типа, и из равенства $\Phi = l\varphi$, $\varphi, \Phi \in P$ следует $l \in P$. Соответствующие функционалы будут связаны соотношением $S = s_l * s$, где $s_l(e^{hz}) = l(h)$ и свертка функционалов определяется по правилу $s_l * s(f) = s_l(s(f(z+h)))$ (s действует по z, а s_l — по h). Если $f \in W$, то $s(f(z+h)) = 0$ и, значит, $S(f) = s_l(s(f(z+h))) = 0$. На этом доказательство завершается. В случае, когда $G = C$, такое рассуждение не проходит. Препятствием служит то обстоятельство, что из $\Phi = l\varphi$, $\Phi, \varphi \in P$, уже, вообще говоря, нельзя заключить, что $l \in \Phi$. Это препятствие преодолевается при помощи следующего аналитического факта, имеющего самостоятельный интерес:

Пусть $\varphi, \Phi \in P$ и $\Phi = l\varphi$. Тогда существует последовательность многочленов $P_n(z)$ и числа $A < \infty$, $\sigma < 1$ такие, что последовательность $P_n(z)\varphi(z)$ равномерно на каждом компакте в C сходится к $\Phi(z)$ и, кроме того, выполняется равномерная оценка $|P_n(z)\varphi(z)| \leqslant Ae^{\sigma H(\theta)|z|}$ $(\theta = \arg z)$.

Доказательство этого утверждения основано на некоторых исследованиях автора ([10]) о целых функциях конечного порядка и слишком громоздко, чтобы его приводить здесь.

Продолжая доказательство в общем случае, рассмотрим функционалы S_n в H, определенные из условий $S_n(e^{hz}) = P_n(h)$. Так как $P_n(h)$ многочлены, то компакты D в интегральных представлениях для S_n можно выбирать в сколь угодно малых окрестностях начала; поэтому свертки $S_n * s$ определяют функционалы из H^*. Опираясь на цитированный выше аналитический факт, можно показать, что $S_n * s \to S$ в топологии H^*. Далее, если $f \in W$, то $s(f(z+h)) = 0$ и, следовательно, $S_n * s(f) = 0$. Отсюда, путем предельного перехода, приходим к равенству $S(f) = 0$.

Итак, S аннулирует W.

Доказательство закончено.

Замечание: изложенный выше способ доказательства для случая $G = C$ известен и распространяется на случай нескольких комплексных переменных (см. по этому поводу ([11], [12])).

Автор выражает благодарность А. Ф. Леонтьеву за постановку задачи и постоянное внимание к своей работе.

Поступило
2 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. P. Ritt, Trans. Am. Math. Soc., **18**, N 1, 27 (1927). [2] G. Polya, Nachr. Gesell. Wissen. Göttingen, Math.-Phys., 2, 187 (1927). [3] M. G. Valiron, Ann. École Norm. Sup. (3), 46, 25 (1929). [4] А. О. Гельфонд, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, № 38, 42 (1951). [5] А. Ф. Леонтьев, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, № 39 (1951). [6] А. Ф. Леонтьев, Матем. сборн., **70**, № 1, 132 (1966). [7] D. G. Dickson, Trans. Am. Math. Soc., **110**, № 2, 361 (1964). [8] R. D. Carmicael, Bull. Am. Math. Soc., **42**, № 4, 193 (1936). [9] А. Ф. Леонтьев, Тр. IV Всесоюзн. Матем. съезда, 2, Л., 1961, стр. 648. [10] И. Ф. Красичков, Матем. сборн., **70**, № 2, 198 (1966). [11] B. Malgrange, C. R., **238**, № 19, 2219 (1954). [12] L. Ehrenpreis, Am. J. Math., **77**, № 2, 293 (1955).