Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 3

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

В. А. ВИНОКУРОВ

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ ПО ТИХОНОВУ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 17 IV 1970)

Пусть мы имеем отображение A метрического пространства в метрическое пространство U, причем $Az_1 \neq Az_2$, если $z_1 \neq z_2$. Задача приближенного решения уравнения

$$Az = u \tag{1}$$

называется регуляризуемой по Тихонову ([1]), если существует однопараметрическое семейство отображений R_δ: $U \longrightarrow Z$, $0 < \delta \leqslant 1$, для которого

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\{u \in U:\ \rho(u,\, Az) \leqslant \delta\}} \rho(z, R_\delta u) = 0, \quad \forall z \in Z. \tag{2}$$

Теорема. *Если задача* (1) *регуляризуема по Тихонову и N — всюду плотное в U множество, то $\bigcup\limits_{n=1} \{R_{1/n}N\}$ — всюду плотное в Z множество.*

Доказательство. Для произвольной точки $z \in Z$ и любого натурального n возьмем $u_n \in N$ такое, что $\rho(Az, u_n) \leqslant 1/n$. По условию регуляризуемости (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(z, R_{1/n} u_n) = 0$, т. е. последовательность $\{R_{1,\, n} u_n\}$ сходится к элементу z пространства Z. Так как $u_n \in N$, то теорема доказана.

Следствие. *Если задача* (1) *регуляризуема по Тихонову и в метрическом пространстве U существует бесконечное всюду плотное множество мощности τ, то и в метрическом пространстве Z существует всюду плотное множество мощности τ. В частности, из сепарабельности U следует сепарабельность Z.*

Отсюда легко следуют примеры нерегуляризуемых задач.

1. Для оператора вложения пространства измеримых ограниченных функций на сегменте $M_{[0,1]}$ в $L_{2[0,1]}$ задача (1) нерегуляризуема по Тихонову.

2. Пусть Z — метрическое несепарабельное пространство монотонно возрастающих на $[0, 1]$ функций, расстояние между которыми измеряется в метрике пространства $M_{[0,1]}$; U — произвольное сепарабельное метрическое пространство (например L_2), тогда для любого отображения A: $Z \to U$ регуляризация невозможна, т. е. невозможно построение приближенных решений $z_\delta \in Z$, погрешность уклонения которых от точного решения $z \in Z$ стремилась бы к нулю по метрике пространства $M_{[0,1]}$. Заметим, что A может быть линейным непрерывным или вполне непрерывным оператором.

3. Интегральное уравнение

$$\int_0^1 k(x, t)\, dg(t) = u(x),$$

рассматриваемое из $M_{[0,2\pi]}$ в $L_{2[0,2\pi]}$, нерегуляризуемо при любом ядре $k(x, t)$.

4. Интегральное уравнение

$$Az = \int_0^{2\pi} k(x - t)\, z(t)\, dt = u(x),$$

рассматриваемое из $M_{[0,\,2\pi]}$ в $L_{2[0,\,2\pi]}$, где $k(t)$ — 2π-периодическая четкая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} k(t)\cos nt\,dt \neq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

нерегуляризуемо. При соответствующем выборе $k(t)$ (например, $k(t) \in L_{2[0,\,2\pi]}$) линейный оператор A будет вполне непрерывным.

Последний результат показывает, что на вопрос А. Б. Бакушинского (см. [2], стр. 71) о возможности регуляризации по Тихонову линейного ограниченного или вполне непрерывного оператора из банахова пространства в банахово при условии единственности решения уравнения (1) следует дать отрицательный ответ. Однако вопрос о регуляризуемости остается открытым для сепарабельного банахова пространства Z.

Из следствия к теореме в совокупности с результатом А. Б. Бакушинского о регуляризуемости задачи (1), если Z — равномерно выпуклое банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор, $A^{-1}0 = \{0\}$ и U — банахово пространство, получаем интересное следствие для линейных операторов в банаховом пространстве: если существует линейное непрерывное отображение A равномерно выпуклого банахова пространства Z в сепарабельное банахово пространство U, $A^{-1}0 = \{0\}$, то Z — сепарабельно.

Если существует вполне непрерывное линейное отображение A равномерно выпуклого банахова пространства Z в нормированное, такое, что $A^{-1}0 = \{0\}$, то Z — сепарабельно. Это следует из сепарабельности области значений вполне непрерывного оператора.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, 153, № 1, 49 (1963). [2] А. Б. Бакушинский, В сборн. Вычислительные методы и программирование, в. 12, М., 1969, стр. 56.