

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Б. В. ЛОГИНОВ, В. А. ТРЕНОГИН

О ПРИМЕНЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП В ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 7 VIII 1970)

В приложениях встречаются нелинейные задачи, решение которых зависит от одного или нескольких свободных числовых параметров. Таковы, например, задачи о длинных и уединенных волнах ⁽¹⁻³⁾, о вторичных стационарных течениях вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами ⁽⁴⁻⁷⁾, о свободной конвекции ⁽⁸⁻¹²⁾, решение которых определяется с точностью до сдвига. Отметим также двухпараметрические семейства решений типа «двойной волны» уравнения Кортвега-де Вриса ⁽¹³⁾.

Непосредственное разыскание многопараметрических семейств решений оказывается затруднительным (см. ⁽¹⁴⁾, гл. 2). Инвариантность задачи относительно некоторой группы преобразований позволяет упростить ее, разыскивая решения, принадлежащие некоторому подпространству. В частном случае эти соображения были использованы в работе В. И. Юдовича ⁽¹²⁾.

В данной заметке рассматривается нелинейное уравнение в пространствах Банаха (используются терминология и обозначения ⁽¹⁴⁾). Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, $B: E_1 \rightarrow E_2$ — нётеровский (для простоты ограниченный) оператор, $R(x, h)$ — нелинейный оператор, непрерывно отображающий окрестность ω точки $(0, 0) \in E_1 + E$ в окрестность нуля в E_2 , непрерывно дифференцируемый по x в ω , причем $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, 0) = 0$. Пусть далее $N(B)$ и $N^*(B)$ — подпространства нулей операторов B и B^* соответственно размерностей n и m , $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ — базис в $N^*(B)$, а $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \in E_1^*$ и $\{z_j\}_{j=1}^m \in E_2$ — соответствующие им биортогональные системы. Задача разыскания l -параметрических семейств решений $x = x(h, t_1, \dots, t_l)$, $x(0, 0, \dots, 0) = 0$ (такие решения мы будем называть малыми) уравнения

$$Bx = R(x, h) \quad (1)$$

эквивалентна нахождению решений $\xi_i = \xi_i(h, t_1, \dots, t_l)$, $\xi_i(0, 0, \dots, 0) = 0$ уравнения разветвления ⁽¹⁴⁾

$$QR(u(v, h) + v, h) = 0, \quad v = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i, \quad Q = \sum_{j=1}^m (\cdot, \psi_j) z_j. \quad (2)$$

В ⁽¹⁴⁾, стр. 107—108, приведены алгебраические условия существования l -параметрического семейства решений уравнения разветвления, основанные на теории исключения. В настоящей заметке осуществляется другой путь — при помощи групповых соображений проводится редукция уравнения разветвления, т. е. задача сводится к решению системы с меньшим числом неизвестных и уравнений.

Пусть $L(a)$, где $a = (a_1, \dots, a_l)$ принадлежит области D эвклидова пространства R^l , — группа линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве E_1 и непрерывно зависящих от $a \in D$ (в равномерной операторной топологии). Группу $L(a)$ будем называть непрерывной s -параметрической в R^l , $0 < s \leq l$, если существует непрерывное отобра-

ражение $a = a(b)$ области $D' \subset R^s$ на $D \subset R^l$ такое, что отображение $L(a(b))$ локально взаимно однозначно.

Всюду ниже $L(a)$, $a \in D \subset R^l$, — непрерывная l -параметрическая в R^l группа линейных операторов, удовлетворяющая следующему условию.

Условие I. Существует базис $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в $E_1^n = N(B)$ такой, что для любого $\varphi \in E_1^n$ найдутся $a \in D$ и постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$, $n - l_1 \leq l$, такие, что

$$L(a)\varphi = \sum_{i=1}^{\lambda} \alpha_i \varphi^{(i)}, \quad \lambda \leq l_1,$$

все $\alpha_i \neq 0$ при $\varphi \neq 0$, где $\varphi^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, l_1$, являются элементами базиса $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$.

Определение. Группа $L(a)$ действует в E_1^n l_1 -стационарно, если в условии I система элементов $\{\varphi^{(i)}\}_{i=1}^{l_1}$ может быть выбрана одной и той же для всех $\varphi \in E_1^n$, $\varphi \neq 0$. Группа $L(a)$ действует в E_1^n l_1 -оптимально, если $\lambda = l_1$ для любого $\varphi \in E_1^n$, $\varphi \neq 0$, и l_1 минимально возможное.

Условие II. Пусть наряду с $L(a)$ существует группа $K(a)$ линейных ограниченных операторов в E_2 такая, что при любом $a \in D \subset R^l$ выполнены соотношения

$$BL(a)x = K(a)Bx, \quad R(L(a)x, h) = K(a)R(x, h). \quad (3)$$

Группа $K(a)$, фигурирующая в соотношениях (3), может быть существенно уже $L(a)$, т. е. k -параметрической, $0 \leq k < l$, в R^l .

Замечание 1. Из условия II вытекает, что: а) подпространство E_1^n инвариантно относительно группы $L(a)$; б) если x — решение уравнения (1), то $L(a)x$ также является решением (1) при любом $a \in D$.

Отмеченная инвариантность E_1^n позволяет дать геометрическую интерпретацию условия I. Траекторией группы $L(a)$ в E_1^n , проходящей через точку φ_0 , называется множество элементов вида $L(a)\varphi_0$. Пусть $E_1^{(\lambda)}$ — подпространство, натянутое на $\varphi^{(i)} \in E_1^n$, $i = 1, \dots, \lambda$. Условие I означает, что для любой траектории существует порождающее, т. е. содержащее некоторую ее точку подпространство $E_1^{(\lambda)}$. Систему конечного числа порождающих подпространств $\mathcal{E} = \{E_1^{(\lambda_i)}\}$ назовем полной, если каждая траектория в E_1^n содержит точку из какого-либо подпространства этой системы, и минимальной, если число подпространств $E_1^{(\lambda_i)}$ в $\mathcal{E}$ нельзя уменьшить.

Замечание 2. Условия l_1 -оптимальности и l_1 -стационарности вместе означают, что полная минимальная система $\mathcal{E}$ состоит из одного подпространства размерности l_1 .

Потребуем, чтобы группа $L(a)$ удовлетворяла еще одному условию.

Условие III. Подпространство $E_1^{\infty-n} = E_1 \div E_1^n$ инвариантно относительно группы $L(a)$.

Лемма 1 (о редукции уравнения разветвления по числу неизвестных). Если выполнены условия I — III, а $\mathcal{E}$ — полная минимальная система порождающих подпространств, то все малые решения уравнения (1) представимы в виде l -параметрических семейств

$$x = L(a)x', \quad (4)$$

где x' — общее малое решение в подпространстве $E_1^{(\lambda)} \div E_1^{\infty-n}$ и $E_1^{(\lambda)}$ пробегает $\mathcal{E}$. Если $m = 0$, то (1) имеет n -параметрическое семейство малых решений (4), l параметров которого имеют групповой смысл.

Доказательство. Представляя произвольное малое решение x уравнения (1) в виде $x = u + v$, $u \in E_1^{\infty-n}$, $v \in E_1^n$, выберем $a \in D$ так, чтобы элемент $L(a)v = v'$ принадлежал некоторому подпространству $E_1^{(\lambda)}$. В силу условия III $L(a)u = u' \in E_1^{\infty-n}$. Уравнение (1) редуцируется к уравнению

$$B'x' = R(x', h), \quad x' = u' + v', \quad (5)$$

где B' является сужением оператора B на $E_1^{(\lambda)} + E_1^{\infty-n}$ и имеет d -характеристику (λ, m) . Соответствующее уравнение разветвления записывается в виде системы m уравнений с λ неизвестными. Согласно замечанию 16), $L(a)x'$ является решением уравнения (1). Указанный прием приводит к разысканию всех малых решений (1), так как для произвольного решения x существует $a \in D$ и подпространство $E_1^{(\lambda)} \in \mathcal{E}$ такие, что $L(a)x = x' \in E_1^{(\lambda)} + E_1^{\infty-n}$, а тогда $x = L(a)^{-1}x'$.

При $m = 0$ утверждение леммы очевидно.

Лемма 2 (о редукции уравнения разветвления по числу уравнений). Если $m \geq 2$ и k -параметрическая в R' непрерывная группа $K^*(a)$, $a \in D$, действует в $E_{2,m}^* \neq N^*(B)$ k_1 -стационарно, то $m - k_1$ уравнений системы (2) можно отбросить.

Доказательство. Легко видеть, что подпространство $E_{2,m}^*$ инвариантно относительно группы $K^*(a)$. Так как группа $K^*(a)$ действует в $E_{2,m}^*$ k_1 -стационарно, можно выбрать базис в $E_{2,m}^*$ так, что для любого $\psi \in E_{2,m}^*$

найдется $a \in D$ и постоянные $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k_1}$ такие, что $K^*(a)\psi = \sum_{j=1}^{k_1} \eta_j \psi_j$.

Тогда последние $m - k_1$ уравнений оказываются следствиями первых k_1 уравнений. Действительно, пусть $x(\xi_1, \dots, \xi_n, h)$ — решение уравнения (1) и $(R(x(\xi_1, \dots, \xi_n, h), h), \psi_j) = 0, j = 1, 2, \dots, k_1$. Существует $a \in D$,

при котором для любого $\psi \in E_{2,m}^* \psi = \sum_{j=1}^{k_1} \eta_j K^*(a)^{-1} \psi_j$. Следовательно,

$$(R(x(\xi_1, \dots, \xi_n, h), h), \psi) = \sum_{j=1}^{k_1} \eta_j (R(x(\xi_1, \dots, \xi_n, h), h), K^*(a) \psi_j) = \sum_{j=1}^{k_1} \eta_j (R(L(a)x(\xi_1, \dots, \xi_n, h), h), \psi_j) = 0$$

в силу замечания 16), что и требовалось доказать.

Теорема 1. Если $n \geq 2, m \geq 2$, выполнены условия I — III и группа $K^*(a)$ действует в $E_{2,m}^*$ k_1 -стационарно, то а) все малые решения уравнения (1) представимы в виде l -параметрических семейств (4), б) уравнение разветвления редуцируется к одной или нескольким системам k_1 уравнений с $\lambda \leq l_1$ неизвестными.

Теорема 1 может значительно упростить применение метода исключений ((14), гл. 2). В случае $k_1 = l_1 = l$ уравнение разветвления редуцируется к одному уравнению с одним неизвестным и становится возможным применение метода диаграмм Ньютона. Для простоты изложения примем, что $L(a)$ действует в E_1^n 1-стационарно. Уравнение (1) при предположении аналитичности оператора $R(x, h)$ редуцируется тогда в окрестности нуля к уравнению

$$B''x' = (I - Q_1) \left\{ R_{01}h + \sum_{i+j \geq 2} R_{ij}x'^i h^j \right\}, \quad Q_1 = \sum_{j=2}^m (\cdot, \psi_j) z_j, \quad (6)$$

где фредгольмовский оператор B'' является сужением оператора B на $E_1^{\infty-n} + \{\psi_1\} = \tilde{E}_1$ и имеет областью значений $E_{2,\infty-m}$ в пространстве $E_{2,\infty-m} + \{z_1\} = E_2$. Если уравнение (6) записать в виде эквивалентной ему системы

$$\tilde{B}''x' = (I - Q_1) \left\{ R_{01}h + \sum_{i+j \geq 2} R_{ij}x'^i h^j \right\} + \xi z_1 = F_{01}h + \sum_{i+j \geq 2} F_{ij}x'^i h^j + \xi z_1,$$

$$\xi = (x', \gamma_1), \quad (\tilde{B}'' = B'' + (\cdot, \gamma_1) z_1),$$

то, разыскивая в случае, когда E — комплексная плоскость, ее решение в виде ряда $x' = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i \xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{\infty} x'_{ij} \lambda^j$, приходим к формулам для

коэффициентов L'_i редуцированного уравнения разветвления, приведенным в (14), стр. 364—365. Метод диаграммы Ньютона позволяет тогда исследовать до конца каждый конкретный случай. Если же $h \in E$ — функциональный параметр, то решение уравнения (6) часто удается получить в виде ряда по однородным операторам.

Отметим еще один способ редукции уравнения разветвления по числу уравнений. Пусть s -параметрическая группа $S(b)$, $b \in D_1 \subset R^s$, линейных ограниченных операторов в E_2 s_1 -оптимально ($m - s_1 \leq s$) действует в $E_{2,m}$ и все траектории имеют одну и ту же размерность. Иногда можно принять за $S(b)$ группу $K(a)$. Можно показать, что числа α_i , $i = 1, 2, \dots, s_1$, фигурирующие в условии I (для $S(b)$), являются тогда значениями s_1 инвариантов группы $S(b)$. Таким образом, уравнение разветвления (2) вследствие условия I и s_1 -оптимальности $S(b)$ эквивалентно системе $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, s_1$, относительно неизвестных $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Будем считать теперь, что $E_1 = E_2$ и уравнение (1) инвариантно относительно l -параметрической в R^l непрерывной группы линейных операторов $L(a)$, $a \in D \subset R^l$. Жордановы цепочки оператора B полагаем определенными однозначно условием принадлежности их элементов подпространству $E_1^{\infty-n}$.

Лемма 3. Пусть $BL(a)x = L(a)Bx$, $a \in D$, и выполнено условие III. Тогда элементам φ и $L(a)\varphi$ отвечают жордановы цепочки одинаковой длины, и оператор $L(a)$ переводит первую цепочку во вторую. Для выполнения условия I необходимо, чтобы по крайней мере две жордановы цепочки, отвечающие нулям $\{\varphi_i\}_1^n$ оператора B , имели одинаковые длины.

Замечание 3. Если оператор B фредгольмов, корневые элементы отсутствуют и группа $L(a)$ действует в E_1^n 1-стационарно, то мы получаем ситуацию, рассмотренную В. И. Юдовичем (12). Нетрудно показать тогда, что в качестве элемента $\varphi^{(1)}$ в условии I может быть выбран любой элемент базиса $\{\varphi_i\}_1^n$, а в качестве редуцированного уравнения разветвления можно взять любое из n уравнений системы (2).

Полученные результаты применимы к широким классам интегральных и дифференциальных (в том числе и с частными производными) уравнений, инвариантных относительно различных непрерывных групп.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
3 VIII 1970

Московский физико-технический институт

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Тер-Крикоров, В. А. Треногин, Матем. сборн., 62, в. 3, 264 (1963).
- ² А. М. Тер-Крикоров, В. А. Треногин, Дифференциальные уравнения, 3, в. 3, 496 (1967).
- ³ В. А. Треногин, ДАН, 156, № 5, 1033 (1964).
- ⁴ W. Velte, Arch. Rat. Mech. Anal., 22, № 1, 1 (1966).
- ⁵ В. И. Юдович, ПММ, 30, в. 4, 688 (1966).
- ⁶ Ю. П. Иванчиков, Г. И. Яковлев, ПММ, 30, в. 4, 768 (1966).
- ⁷ С. Н. Овчинникова, В. И. Юдович, ПММ, 32, в. 5, 858 (1968).
- ⁸ W. Velte, Zs. angew. Math. u. Phys., 13, 591 (1962).
- ⁹ М. Р. Уховский, В. И. Юдович, ПММ, 27, в. 2, 295 (1963).
- ¹⁰ W. Velte, Arch. Rat. Mech. Anal., 16, № 2, 97 (1964).
- ¹¹ В. И. Юдович, ПММ, 30, в. 6, 1000 (1966).
- ¹² В. И. Юдович, ПММ, 31, в. 1, 101 (1967).
- ¹³ П. Д. Лэкс, Сборн. пер. Математика, 13, 5, 128 (1969).
- ¹⁴ М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969.