Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 1

УДК 519.21+513.82/88

МАТЕМАТИКА

В. Н. СУДАКОВ

ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И МЕРЫ ТЕЛЕСНЫХ УГЛОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 9 VII 1970)

Ниже приводятся в геометрических терминах критерий ограниченности реализаций гауссовского случайного процесса и критерий ограниченности реализаций случайных процессов со вторыми моментами, имеющих заданную корреляционную функцию.

1. Пусть (Ω, μ) — вероятностное пространство с сепарабельной (т. е. такой, что пространство $L^2(\Omega, \mu)$ сепарабельно) неатомической мерой; $\{x_t(\omega),\ t \in T\} \subset L^2(\Omega, \mu)$ — случайный процесс со вторыми моментами. Вопрос об ограниченности с вероятностью единица реализаций процесса $x_t(\omega)$ — это вопрос структурной ограниченности подмножества $K = \{x_t,\ t \in T\} \subset L^2(\Omega, \mu) \subset S(\Omega, \mu)$ в пространстве $S(\Omega, \mu)$ классов эквивалентных измеримых функций. Если K представляет собой выпуклое замкнутое уравновешенное подмножество пространства $L^2(\Omega, \mu)$, то его структурная ограниченность в $S(\Omega, \mu)$ в точности означает, что почти все выборочные функции процесса принадлежат банахову пространству E всех линейных непрерывных на K функционалов, т. е. пространству, сопряженному к банахову пространству с единичным шаром K. Если процесс $\{x_t,\ t \in T\}$ гауссовский центрированный, иными словами, если $K \subset \mathscr{H} \subset L^2(\Omega, \mu)$, где $\mathscr{H}$ — гауссовское подпространство пространства $L^2(\Omega, \mu)$ ([1]), то структурная ограниченность множества K определяется только его внутренней геометрией. Без предположения гауссовости можно поставить вопрос о том, каковы те компакты $K \subset L^2(\Omega, \mu)$, которые структурно ограничены в $S(\Omega, \mu)$ вместе с любым своим изометричным образом.

Теорема 1. *Если компакт $K \subset L^2(\Omega, \mu)$ является образом некоторого ограниченного по норме подмножества B пространства $L^2(\Omega, \mu)$ при отображении Гильберта — Шмидта (т. е. если K — шмидтовское множество ([2])), то K структурно ограничен вместе с любым своим изометричным образом, и его структурный супремум* $\sup K$ *принадлежит пространству $L^2(\Omega, \mu)$. В противном случае найдется такой изометрический оператор U, что множество UK не ограничено структурно ни на каком подмножестве пространства (Ω, μ) положительной меры (иначе говоря, реализации соответствующего случайного процесса неограничены с вероятностью единица).*

2. Более тонкой проблемой является проблема описания класса GB всех структурно ограниченных подмножеств гауссовского подпространства $\mathscr{H}$, т. е., по существу, задача отыскания критерия ограниченности выборочных функций произвольного гауссовского процесса. Эту проблему мы сначала сведем к некоторой задаче геометрии выпуклых тел в гильбертовом пространстве.

Пусть сперва $F = R^n$ — эвклидово пространство, $\Sigma_F = \{x\colon\ x \in F,\ \|x\| = 1\}$. Пусть $Q \subset \Sigma_F$ — произвольное подмножество, $\operatorname{con} Q$ — конус, натянутый на Q, и $(\operatorname{con} Q)^\perp$ — дуальный (опорный) конус в сопряженном пространстве F^*, т. е. $(\operatorname{con} Q)^\perp = \{y\colon\ y \in F^*,\ (x, y) \geqslant 0$ при всех $x \in \operatorname{con} Q\}$. Заметим, что мера $m(\operatorname{con} Q)^\perp$ величины телесного угла $(\operatorname{con} Q)^\perp$ (относительно сферически инвариантной меры m в пространстве F^*) определяется только внутренней метрикой множества Q, индуцированной вложением $Q \subset \Sigma_F \subset F$, и не зависит от размерности пространства F, которую можно произвольно увеличивать. При $n = 3$, как известно из сферической геометрии, $m(\operatorname{con} Q)^\perp = 1/2 - p/4\pi$, где p — длина периметра сферически выпуклой оболочки множества $Q \subset \Sigma_F$ (при условии, что она не совпадает с Σ_F). Однако в случае $n = 4$ уже для простейшего случая сферического симплекса Q величина $m(\operatorname{con} Q)^\perp$ не выражается сколько-нибудь просто через попарные угловые расстояния вершин Q. Нас будет интересовать бесконечномерное (гильбертово) обобщение описанной конструкции. Отличие от конечномерного случая состоит в том, что дуальный конус приходится строить в подходящим образом выбранном расширении сопряженного гильбертова пространства, а в качестве меры m брать какую-нибудь сферически инвариантную меру в этом расширении (например, гауссову). Нас будет интересовать описание класса всех таких подмножеств $Q \subset \Sigma_H$, для которых $m(\operatorname{con} Q)^\perp > 0$. Относительная компактность множества Q при этом необходима, но не достаточна.

3. Покажем, как проблема ограниченности реализаций гауссовского процесса сводится к только что сформулированной проблеме о положительности меры дуального телесного угла.

Первая проблема может быть переформулирована следующим образом: для компакта $K \subset H$ требуется установить, найдется ли такое $\lambda > 0$, что $\gamma(\lambda K)^0 > 0$, где γ — гауссова мера, а A^0 — определяемая с точностью до подмножества меры нуль поляра множества A в пространстве с гауссовской мерой (см. ([3]), предложение 2). Пусть теперь $Q \subset \Sigma_H$, $z \in \Sigma_H$,— такой вектор, что $\langle z, x\rangle_H > 0$ при всех $x \in Q$ (если такого вектора z не существует, то $m(\operatorname{con} Q)^\perp = 0$.) Рассмотрим на гиперплоскости $\tilde{H} = \{x\colon x \in H, \langle x, z\rangle_H = 0\}$ множество $\tilde{Q}$, являющееся образом множества Q при отображении q, переводящем элемент $x \in Q$ в элемент $x\langle x, z\rangle_H^{-1} - z \in \tilde{H}$ ($\tilde{Q}$ изометрично центральной проекции множества Q на афинную гиперплоскость в H, касающуюся сферы Σ_H в точке z). Можно проверить, что $m(\operatorname{con} Q)^\perp = \varkappa\tilde{Q}^0$, где $\varkappa$ — мера Коши, т. е. мера, задаваемая характеристическим функционалом $\chi(x) = \exp(-\|x\|)$ ([3]) в надлежащем расширении пространства, сопряженного к $\tilde{H}$. Заметим при этом, что отображение $q\colon Q \to \tilde{Q}$ растягивающее, но для некоторого $\beta > 1$ отображение $\beta^{-1}q\colon Q \to \tilde{Q}$, при котором $\beta x \to x\langle x, z\rangle_H^{-1} - z$, сжимающее. Как следует из работы ([2]), $\varkappa\tilde{Q}^0 > 0$ в том и только в том случае, когда $\tilde{Q} \in GB$.

4. Пусть $K \subset R^n$ — выпуклый компакт, $V \subset R^n$ — шар единичного радиуса. Смешанными объемами (см., например, ([4])) называются коэффициенты при степенях ε в разложении $w(K, \varepsilon) = \operatorname{vol}_n(K + \varepsilon V) = w_n(K) + \varepsilon w_{n-1}(K) + \ldots + \varepsilon^n w_0(K)$ ($\operatorname{vol}_n A$ — n-мерный объем тела $A \subset R^n$). Смешанные объемы обычно рассматриваются при фиксированном n и с точностью до мультипликативной постоянной. Условимся для каждого n эту постоянную a_n выбирать так, чтобы для прямолинейного отрезка I величина $h_1(I) = a_n w_1(I)$ равнялась бы длине этого отрезка. Теперь величина функционала $h_1(K)$ определяется только внутренней метрикой конечномерного компакта K и легко проверяется, что его можно корректным образом распространить и на бесконечномерные компакты $K \subset H$ (разрешив этому функционалу принимать значение $+\infty$). Для плоских выпуклых фигур $K \subset R^2$ величина $h_1(K)$ равна полупериметру; для выпуклых тел $K \subset R^3$ величина $h_1(K)$ пропорциональна интегралу средней кривизны, в частности, если K — выпуклый многогранник, то $h_1(K) = \frac{1}{\pi}\sum\limits_k (\pi - \varphi_k)\, l_k$, где l_k — длина ребра многогранника K, а φ_k — величина двугранного угла при этом ребре; суммирование происходит по всем ребрам. Для шара $V_n \subset R^n$ единичного радиуса

$$h_1(V_n) = \sqrt{\pi}\,(n-1)\ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sim \sqrt{\pi n}.$$

Функционал $h_1(K)$ — однородный степени однородности 1 (с этим свойством связано и его обозначение). Если $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, $K = \bigcap\limits_n K_n$, то

$h_1(K) \leqslant \lim h_1(K_n)$ (для конечномерных компактов всегда имеет место равенство).

Сформулируем теперь основные теоремы нашей заметки.

Теорема 2. *Пусть даны два выпуклых многогранника K' и K'' с вершинами $\{P_i', i = 1, \ldots, N\}$ и $\{P_i'', i = 1, \ldots, N\}$. Если $l'_{ij} \leqslant l_{ij}''$ для всех $i, j = 1, \ldots N$ (l_{ij} — длина ребра P_iP_j), то $h_1(K') \leqslant h_1(K'')$.*

Теорема 3. *Для произвольного выпуклого компакта $K \subset H$, содержащего начало координат, имеет место формула*

$$\frac{d}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \varkappa(\lambda K)^0 = -\frac{1}{2\pi} h_1(K).$$

Теорема 4. *Если $h_1(K) = \infty$, то $\varkappa K^0 = 0$ и $\gamma(\lambda K)^0 = 0$ для любого $\lambda > 0$, т. е. $K \notin GB$; если $h_1(K) < \infty$, то $\gamma K^0 > 1 - \sqrt{2\pi} h_1(K)$, и тогда $\gamma(\lambda K)^0 > 0$ для некоторого $\lambda > 0$, т. е. $K \in GB$.*

Таким образом, условия $K \in GB$ и $h_1(K) < \infty$ эквивалентны.

При доказательстве теорем важную роль играет формула Шлефли ([5]). Кроме того, для перехода к бесконечномерному случаю используется одна лемма Шеппа из его работы ([6]).

5. Для проверки условия $h_1(K) < \infty$ во многих случаях полезна теорема 2, нередко позволяющая сводить задачу к более простому компакту K. С помощью этой теоремы можно, в частности, получить следующие условия конечности функционала $h_1(K)$, выраженные в терминах ε-энтропии ($H(K, \varepsilon) = \ln N(K, \varepsilon)$, где $N(K, \varepsilon)$ — мощность минимальной ε-сети множества K).

Теорема 5. Если $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(H(K, 2^{-k}))^{1/2}}{2^k} < \infty$, *в частности, если* $\rho(K) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln H(K, \varepsilon)}{\ln \varepsilon^{-1}} < 2$, *то* $h_1(K) < \infty$. *Если же* $\int_0^1 \varepsilon^2 dH(K, \varepsilon) = -\infty$, *в частности, если* $\rho(K) > 2$, *то* $h_1(K) = \infty$.

Частично утверждение теоремы 5 можно получить косвенным путем, используя результаты работ ([2]) и ([7]). Однако метод, применявшийся автором в ([2]), по существу основан на использовании свойств функционала $h_1(K)$, и явное выделение его представляется полезным.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
2 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Вершик, ДАН, 170, № 3, 497 (1966). [2] В. Н. Судаков, ДАН, 185, № 1, 51 (1969). [3] В. Н. Судаков, УМН, 18, 1 (109), 182 (1963). [4] Г. Буземан, Выпуклые поверхности, «Наука», 1964. [5] L. Schläfli, Quart. J. Pure and Appl. Math., 2 (1858); 3 (1860). [6] L. A. Shepp, On the Supremum of Gaussian Sequences, Preprint, 1969. [7] R. Dudley, J. Funct. Analysis, 1, № 3, 290 (1967).