**Доклады Академии наук СССР**
**1970. Том 195, № 5**

УДК 513.83

*МАТЕМАТИКА*

**В. ЗАЙЦЕВ**

# О БИКОМПАКТНОСТИ И ПОЛНОТЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В СВЯЗИ С ТЕОРИЕЙ АБСОЛЮТОВ

*(Представлено академиком П. С. Александровым 18 V 1970)*

1. Назовем $H$-системой всякое семейство $\xi$ непустых $\varkappa a$-множеств *, направленное по включению, т. е. удовлетворяющее условию: для любых двух элементов $A' \in \xi$, $A'' \in \xi$ найдется такой элемент $A \in \xi$, что $A \subseteq A' \cap A''$. Максимальные $H$-системы, как обычно, называются $H$-концами.

В работе дается новый критерий бикомпактности.

Теорема 1. *Для бикомпактности регулярного пространства достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы каждая $H$-система имела непустое пересечение.*

В этой теореме, обобщающей элементарную теорему о вложенных отрезках, класс центрированных систем множеств, от которых требуется непустота пересечения, по-видимому, доведен до минимума.

Замечание 1. Из свойства максимальности $H$-концов следует, что если $\varkappa a$-множество $A'$ содержит некоторый элемент $A \in \xi$, то и само $A' \in \xi$.

Пусть $X$ — произвольное пространство. Множество всех $H$-концов пространства $X$ обозначим через $H(X)$. В это множество вводим классическую топологию П. С. Александрова ([1]). Для произвольного $\varkappa a$-множества $A$ пространства $X$ обозначим через $O_A$ семейство всех $H$-концов, содержащих множество $A$ в качестве элемента. Совокупность множеств $O_A$, когда $A$ пробегает все $\varkappa a$-множества пространства $X$, примем за открытую базу пространства $H(X)$. Легко проверить, что таким образом действительно определяется топология.

Докажем, что пространство $H(X)$ для любого пространства $X$ есть непустой бикомпакт. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Предел полного расслабления ** $s_\varkappa^* X$ максимального конечного спектра $s_\varkappa X$ произвольного пространства $X$ есть пространство $H(X)$.*

Доказательство. Прежде всего, из самого определения $H$-системы следует, что никакая $H$-система не может содержать двух различных элементов, принадлежащих одному и тому же разбиению $\alpha$.

Предложение 1. *Множество всех элементов нульмерной нити $\xi = \{A_\alpha\}$ спектра $s_\varkappa X$ есть $H$-конец $\eta = \eta(\xi)$. Обратно, если $\eta = \{A^\lambda\}$ — какой-нибудь $H$-конец, то для любого $\alpha \in \varkappa_X$ пересечение $\eta \cap \alpha$ состоит из единственного элемента $A_\alpha$ и $\xi = \{A_\alpha\}$ есть нульмерная нить, для которой $\eta(\xi) = \eta$.*

Доказательство предложения 1. Если $\xi = \{A_\alpha\}$ есть нульмерная нить спектра $s_\varkappa X$, то взяв произвольно $A_\alpha \in \xi$, $A_{\alpha'} \in \xi$ и $\alpha''$, следующее как за $\alpha$, так и за $\alpha'$, получим $A_{\alpha''} \in \xi$, содержащее как в $A_\alpha$, так

---

* $\varkappa a$-множествами называются множества, являющиеся замыканиями открытых множеств (канонические замкнутые множества).

** В смысле В. И. Пономарева ([2, 3]): полное расслабление проекционного спектра $s = \{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'}\}$ есть спектр, $s^* = \{K_\alpha^*, \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'}\}$, получаемый из $s$ заменой каждого комплекса $K_\alpha$ нульмерным комплексом $K_\alpha^*$, состоящим из всех вершин комплекса $K_\alpha$. Максимальный конечный спектр — это спектр $s_\varkappa X = \{N_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'}\}$, состоящий из нервов $N_\alpha$ всех конечных разбиений $\alpha$ пространства $X$. При этом разбиением (согласно Пономареву) пространства $X$ называется любое локально конечное покрытие, состоящее из $\varkappa a$-множеств с дизъюнктными открытыми ядрами. Направленное множество всех, соответственно всех конечных разбиений пространства $X$ обозначается через $\xi_X$, соответственно $\varkappa_X$.

и в $A_{\alpha'}$. Итак, множество элементов нульмерной нити $\xi$ есть $H$-система $\eta(\xi)$. То, что $\eta(\xi)$ есть максимальная $H$-система, вытекает из следующей леммы.

Основная лемма. *Если $\eta$ — $H$-конец, то для любого $\alpha \in \varkappa_X$ пересечение $\eta \cap \alpha$ непусто (и, значит, состоит из одного элемента).*

В самом деле, пусть эта лемма доказана и пусть $\eta = \eta(\xi)$ содержится в отличной от нее $H$-системе $\eta'$, которую можем предположить максимальной. Пусть $A' \in \eta'$, $A' \notin \eta$ и пусть $\alpha \in \varkappa_X$ — какое-нибудь разбиение, содержащее элемент $A'$. Так как (по лемме) $\alpha$ содержит и некоторый элемент $A \in \eta$ и $A' \neq A$, то $\alpha$ содержит, по крайней мере, два элемента $H$-системы $\eta'$, что невозможно.

Для доказательства основной леммы нужна

Лемма 1. *Если $\eta = \{A_\lambda\}$ есть $H$-конец и $A$ — такое $\varkappa a$-множество, что $IA \cap IA_\lambda \neq \Lambda$ для любого $A_\lambda \in \eta$, то $A \in \eta$.*

Утверждение следует из того, что пополняя $H$-систему $\eta$ всеми элементами вида $[IA \cap IA_\lambda]$, получаем снова $H$-систему.

Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. *Если $A'$ и $A''$ — элементы $H$-конца $\eta$, то и $[IA' \cap IA''] \in \eta$.*

Основную лемму докажем сначала для случая разбиения $\alpha = \{A, B\}$, состоящего из двух элементов (тогда очевидно $B = [X \setminus A]$).

Берем произвольно $A_\lambda \in \eta$ и рассматриваем случай, когда $IA_\lambda \cap IA = \Lambda$. Тогда и $IA_\lambda \cap A = \Lambda$, т. е. $IA_\lambda \subseteq B$, $A_\lambda \subseteq B$, значит $B \in \eta$. Остается случай, когда $IA_\lambda \cap IA \neq \Lambda$ для любого $A_\lambda \in \eta$. Но тогда по лемме 1 имеем $A \in \eta$.

Предположим, что формула $\eta \cap \alpha \neq \Lambda$ доказана для всех разбиений $\alpha$, состоящих из $m$ элементов и доказываем ее для произвольного разбиения

$$\alpha = \{A_1^\alpha, \ldots, A_m^\alpha, A_{m+1}^\alpha\}, \quad m \geqslant 2, \tag{1}$$

состоящего из $m+1$ элементов. Сохраняя обозначения формулы (1), рассмотрим разбиение

$$\alpha' = \{A_1^{\alpha'}, \ldots, A_{m-1}^{\alpha'}, A_m^{\alpha'}\},$$

где $A_i^{\alpha'} = A_i^\alpha$ для $i \leqslant m-1$ и $A_m^{\alpha'} = A_m^\alpha \cup A_{m+1}^\alpha$.

В силу предположения индукции один из элементов разбиения $\alpha'$ принадлежит $\eta$. Если этим элементом является одно из множеств $A_i^{\alpha'}$, $i \leqslant m-1$, то все доказано.

Пусть $A_m^{\alpha'} \in \eta$. Рассмотрим разбиение $\alpha'' = \{A_1^{\alpha''}, A_2^{\alpha''}\}$, $A_1^{\alpha''} = A_{m+1}^\alpha$, $A_2^{\alpha''} = X \setminus IA_1^{\alpha''} = [X \setminus A_1^{''}]$. Если $A_1^{\alpha''} \in \eta$, то снова все доказано.

Пусть $A_2^{\alpha''} \in \eta$. Докажем, что $[IA_2^{\alpha''} \cap IA_m^{\alpha'}] = A_m^\alpha$.

В самом деле,

$$A_m^{\alpha'} = A_m^\alpha \cup A_{m+1}^\alpha, \; A_2^{\alpha''} = X \setminus IA_{m+1}^\alpha = \bigcup_{k=1}^{m} A_k^\alpha.$$

Далее, $IA_m' = I(A_m^\alpha \cup A_{m+1}^\alpha) = X \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} A_j^\alpha$, $IA_2^{\alpha''} = X \setminus A_{m+1}^\alpha$,

$$[IA_m' \cap IA_2^{\alpha''}] = [(X \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} A_j^\alpha) \cap (X \setminus A_{m+1}^\alpha)] =$$

$$= [X \setminus (A_1^\alpha \cup \ldots \cup A_{m-1}^\alpha \cup A_{m+1}^\alpha)] = [IA_m^\alpha] = A_m^\alpha,$$

что и требовалось. В силу леммы 2 имеем $A_m^\alpha \in \eta$; основная лемма доказана.

Второе утверждение предложения 1 доказывается теперь так.

Пусть дан $H$-конец $\eta$. Для каждого $\alpha \in \varkappa_X$ положим $\eta \cap \alpha = (A_\alpha)$. Требуется доказать, что при $\alpha'' > \alpha'$ имеем $A^{\alpha''} \subseteq A^{\alpha'}$. Так как $\eta$ есть $H$-конец, то существует $A \in \eta$, $A \subseteq A^{\alpha'} \cap A^{\alpha''}$. Так как $\alpha'' > \alpha'$ и $A^{\alpha''} \in \alpha''$, то имеется единственный элемент разбиения $\alpha'$, содержащий множество $A^{\alpha''}$, а так как $A \subseteq A^{\alpha'} \cap A^{\alpha''}$, то этим элементом может быть только $A^{\alpha'}$.

Итак, имеем (очевидно, взаимно однозначное) отображение

$$\eta: \tilde{s}_\varkappa^* X \to H(X)$$

пространства $\tilde{s}_\varkappa^* X$ на $H(X)$.

Легко проверить, что при этом

$$\eta(O_e) = O_A,$$

где $e$ — какая-нибудь вершина спектра $s_\varkappa X$, соответствующая $\varkappa a$-множеству $A$. Из этого равенства заключаем, что отображение $\eta$ переводит открытую базу пространства $\tilde{s}_\varkappa^* X$ в открытую базу пространства $H(X)$. Следовательно, $\eta$ — гомеоморфизм. Теорема 2 доказана.

Назовем $h$-концом всякий $H$-конец $\xi = \{A_\lambda\}$, для которого $\bigcap\limits_\lambda A_\lambda \neq \Lambda$. Множество всех $h$-концов пространства $X$ образует подпространство $h(X)$ пространства $H(X)$. Следовательно, $h(X)$ вполне регулярно.

Известен результат В. Пономарева ([2], [3]), в силу которого для регулярного пространства $X$ пространство $\tilde{s}_\varkappa^* X$ совпадает с чеховским расширением $\beta X^*$ абсолюта $X^*$, а сам абсолют $X^*$ есть подпространство пространства $\tilde{s}_\varkappa^* X$, состоящее из всех нульмерных нитей, пересечение элементов которых не пусто. Этим нитям соответствуют $H$-концы, пересечение элементов которых непусто, т. е. $h$-концы.

Т е о р е м а 3. *Абсолют $X^*$ регулярного пространства $X$ есть пространство $h(X)$; пространство $H(X)$ есть чеховское расширение $\beta X^*$ абсолюта $X^*$.*

Если всякая $H$-система в регулярном пространстве $X$ имеет непустое пересечение, то $X^* = h(X) = H(X)$, т. е. абсолют регулярного пространства $X$ бикомпактен, следовательно, и само $X$ бикомпактно. Мы доказали теорему 1 *.

2. Обозначим через $s_\zeta X = \{N_\alpha\, \varpi_\alpha^{\alpha'}\}$ — спектр над семейством $\zeta_X$ всех разбиений пространства $X$ ([2], [3]). Так как $\varkappa_X \subseteq \zeta_X$, то спектр $s_\varkappa X$ есть подспектр спектра $s_\zeta X$.

О п р е д е л е н и е. Назовем $\zeta$-с и с т е м о й центрированную систему $\varkappa a$-множеств $\xi$, удовлетворяющую условиям:

А) если $A \in \zeta$ и $\sigma$ — некоторое множество $\varkappa a$-множеств, образующих разбиение множества $A$, то $\xi \cap \sigma \neq \Lambda$;

Б) если $A \in \xi$ и $A$ лежит в $\varkappa a$-множестве $A'$, то и $A' \in \xi$.

Пространство называется $\zeta$-полным, если в нем пересечение всякой $\zeta$-системы непусто.

П р е д л о ж е н и е 2. *Всякий паракомпакт есть $\zeta$-полное пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя В. И. Пономареву ([4]), скажем, что система множеств $\xi$ касается покрытия $\alpha$, если в покрытии $\alpha$ содержится элемент, пересекающийся со всеми множествами, входящими в систему $\xi$. Пономарев заметил, что для того, чтобы пространство $X$ было паракомпактно, необходимо и достаточно, чтобы всякая система замкнутых множеств, касающаяся всех локально конечных покрытий, имела непустое пересечение. Он же доказал, что в этом условии локально конечные покрытия могут быть заменены разбиениями.

Пусть теперь $\xi$ — произвольная $\zeta$-система. Тогда в каждом $\alpha \in \zeta_X$ имеется элемент $A \in \xi$, и этот элемент пересекается со всеми элементами системы $\xi$. Другими словами, всякая $\zeta$-система касается всех разбиений $\alpha \in \zeta_X$. Если $X$ — паракомпакт, то отсюда по признаку Пономарева следует, что пересечение всех $A \in \xi$ непусто, т. е. что $X$ является $\zeta$-полным.

О п р е д е л е н и е. Нити спектра $s_\zeta X$ (соответственно спектра $s_\varkappa X$) называем $\zeta$-нитями (соответственно $\varkappa$-нитями). Нульмерная нить $\xi = \{A^\alpha\}$ называется непустой, если все элементы, образующие нить, имеют непустое пересечение.

---

* Можно дать и прямое доказательство этой теоремы, однако, оно по существу повторит те леммы, на которые опирается доказательство основных свойств абсолюта.

П р е д л о ж е н и е 3. *В регулярном пространстве $X$ всякая непустая нульмерная $\varkappa$-нить $\xi_\varkappa$ единственным образом дополняется до нульмерной $\zeta$-нити $\xi_\zeta = \zeta(\xi_\varkappa)$; при этом нити $\xi_\zeta = \zeta(\xi_\varkappa)$ и $\xi_\varkappa$ состоят из одного и того же множества элементов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что в любом разбиении $\alpha \in \zeta_X$ содержится элемент $A^\alpha$ (очевидно, единственный), принадлежащий данной непустой нити $\xi_\varkappa$. Пусть $x_0$ — единственная точка, принадлежащая всем элементам $A \in \xi_\varkappa$ и пусть $\sigma = \{A_1^\alpha, \ldots, A_s^\alpha\}$ — совокупность всех элементов разбиения $\alpha$, содержащих точку $x_0$. Положим $\sigma' = \alpha \setminus \sigma$, $B = \bar{\sigma}' = [X \setminus \bar{\sigma}]$. Тогда среди элементов конечного разбиения $\{A_1^\alpha, \ldots, A_s^\alpha, B\}$ пространства $X$ один единственный содержится в $\xi_\varkappa$. Этим элементом не может быть $B$, так как $x_0 \notin B$. Значит, один из элементов $A_1^\alpha, \ldots, A_s^\alpha$ покрытия $\alpha$ содержится в $\xi_\varkappa$. Выбирая в каждом $\alpha$ по элементу $A^\alpha \in \xi_\varkappa$, получим $\zeta$-нить. Действительно, множество всех элементов $\xi_\varkappa$ есть $H$-система согласно предложению 1. Поэтому для $\alpha', \alpha'', \alpha'' > \alpha'$ имеется $A \in \xi_\varkappa$, лежащий в $A^{\alpha'} \cap A^{\alpha''}$. Но $\alpha'' > \alpha'$ и $A^{\alpha''}$ содержится в единственном элементе разбиения $\alpha'$ и ни с каким другим элементом этого разбиения не имеет общих внутренних точек. Поэтому из $A \subseteq A^{\alpha'} \cap A^{\alpha''}$ следует, что $A^{\alpha''} \subseteq A^{\alpha'}$, т. е. при $\alpha'' > \alpha'$ имеем $\tilde{\omega}_{\alpha'}^{\alpha''} A^{\alpha''} = A^{\alpha'}$. Предложение доказано.

С другой стороны, очевидно, что если $X$ есть регулярное $\zeta$-полное пространство, то всякая нульмерная $\zeta$-нить $\xi_\zeta$ содержит единственную $\varkappa$-нить $\xi_\varkappa$ непустую, причем $\zeta(\xi_\varkappa) = \xi_\zeta$.

Итак, для $\zeta$-полных пространств $X$ существует взаимно однозначное отображение между нульмерными непустыми $\varkappa$-нитями и всеми вообще нульмерными $\zeta$-нитями. В силу этого соответствия мы имеем естественный гомеоморфизм между пространствами $h(X)$ и $\tilde{s}_\zeta{}^* X$ — тем самым доказана

Т е о р е м а 4. *Абсолют регулярного $\zeta$-полного пространства $X$ совпадает с пределом полного расслабления спектра $s_\zeta X$.*

З а м е ч а н и е 2. Теорема 4 верна и для (по крайней мере, формально) более широкого класса так называемых $\zeta^\varphi$-полных пространств *; это такие пространства, в которых непустота пересечения требуется лишь от $\zeta^\varphi$-систем, т. е. $\zeta$-систем $\xi$, для которых все $\xi \cap \alpha$, $\alpha \in \zeta_X$, конечны.

Для паракомпактных пространств теорема 4, как известно, была доказана В. И. Пономаревым [2, 3], причем не непосредственно, а через дескриптивное определение абсолюта, как максимального совершенного прообраза пространства $X$.

Выражаю сердечную благодарность П. С. Александрову, под руководством которого сделана эта работа.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. А л е к с а н д р о в, Матем. сборн., 5, 403 (1939). [2] В. И. П о н о м а р е в, ДАН, 143, 1, 46 (1962). [3] В. И. П о н о м а р е в, Матем. сборн., 60, 1, 88 (1963). [4] В. И. П о н о м а р е в, Вестн. Московск. унив., сер. матем., мех., № 2, 33 (1962).

* Мне неизвестно, существуют ли $\zeta^\varphi$-полные пространства, не являющиеся $\zeta$-полными.