Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 5

УДК 519.3 — *МАТЕМАТИКА*

А. Д. ИОФФЕ

B-ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДАЕМЫЕ ВЫПУКЛЫМИ ИНТЕГРАНТАМИ И МНОГОМЕРНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 IV 1970)

В заметке изучается теория двойственности для выпуклых многомерных вариационных задач (т. е. задач с частными производными). В пункте 1 описываются функциональные пространства, в которых удобно рассматривать такие задачи. Эти пространства тесно связаны с пространствами Орлича [1] и обладают рядом присущих последним свойств. В пункте 2 содержится собственно постановка задачи, которая затем обычным образом интерпретируется как задача на сдвинутом линейном многообразии. Наконец, в пункте 3 формулируется теорема двойственности для задач последнего типа. Эта теорема (применительно к задаче, рассмотренной в п. 2) обобщает некоторые результаты, полученные в [2, 3] для одномерных задач на задачи с частными производными.

1. Пусть (T, Σ, μ) пространство с конечной положительной мерой, $\overline{R} = R \cup \{+\infty\}$. Мы будем рассматривать функции $f\colon T \times R^n \to \overline{R}$, обладающие следующими свойствами:

а) $f(t, x)$ измерима относительно σ-алгебры $\Sigma \otimes \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — алгебра борелевских подмножеств R^n,

б) почти при каждом $t \in T$ $f(t, x)$ выпукла и замкнута (т. е. полунепрерывна снизу) по x.

Такие функции рассматривались в [4, 5]. Они названы в [4] нормальными выпуклыми интегрантами (н.в.и.). По поводу принятого здесь определения см. также [6]. Если f — н.в.и., то $f(t, x(t))$ измерима для всякой измеримой $x(t)$ и

$$f^*(t, y) = \sup_x ((x, y) - f(t, x))$$

($(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в R^n) тоже н.в.и.

В дальнейшем всюду предполагается, что $f(t, 0) \equiv 0$, $f(t, x) = f(t, -x)$ (хотя результаты, подобные сформулированным в пункте 3, справедливы и без этого предположения). Тогда, очевидно, $f(t, x) \geqslant 0$ и теми же свойствами обладает f^*.

Пусть $x_t\colon T \to R^n$. Положим

$$I_f(x_t) = \int_T f(t, x_t)\, d\mu,$$

$$\operatorname{dom} I_f = \{x_t \in L_1 \mid I_f(x_t) < \infty\}.$$

Определение 1. $$L_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \operatorname{dom} I_f.$$

L_f — линейное пространство; это следует непосредственно из выпуклости и симметричности $\operatorname{dom} I_f$.

Определение 2. Скажем, что $f(t, x)$ удовлетворяет а) условию (А), если $f(t, x)$ суммируема для всякого x из некоторой окрестности нуля в R^n; б) условию (В), если $f(t, x)$ суммируема для всякого $x \in R^n$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Если f и f^* удовлетворяют условию* (A), *то* L_f *и* L_{f^*} *двойственны относительно билинейной формы*

$$\langle x_t, y_t\rangle = \int\limits_T (x_t, y_t)^*_t d\mu.$$

В дальнейшем условие (A) предполагается выполненным. Положим

$$B_f = \{x_t \in \operatorname{dom} I_f \mid I_f(x_t) \leqslant 1\},$$

$$S_f = B^0_{f^*} = \{x_t \in L_f \mid \langle x_t, y_t\rangle \leqslant 1 \ \forall y_t \in B_{f^*}\}.$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Множества* B_f *и* S_f — *поглощающие в* L_f, *замкнутые и ограниченные в топологии* $\sigma(L_f, L_{f^*})$, *причем*

$$S_f \subset B_f \subset 2S_f$$

(*по поводу последнего соотношения см.* ([7])).

Поэтому B_f и S_f порождают эквивалентные нормы в L_f, которые по аналогии с пространствами Орлича естественно назвать нормами Люксембурга и Орлича соответственно. Легко доказывается, что L_f полно относительно введенных норм.

Обозначим через E_f замыкание в нормированной топологии L_f множества ограниченных функций.

О п р е д е л е н и е 3. Линейный непрерывный функционал λ^* на L_f называется а) сингулярным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество G_ε, $\mu G_\varepsilon < \varepsilon$, такое, что $\langle x_t, \lambda\rangle = 0$ для всякой $x_t \in L_f$, равной нулю на G_ε ([8]); б) вполне сингулярным, если $\langle x_t, \lambda^*\rangle = 0$ для всякой $x_t \in E_f$; в) ограниченно сингулярным, если он сингулярен и

$$\|\lambda^*\| = \sup_{x_t \in L_f} \frac{\langle x_t, \lambda^*\rangle}{\|x_t\|} = \sup_{x_t \in E_f} \frac{\langle x_t, \lambda^*\rangle}{\|x_t\|}.$$

П р е д л о ж е н и е 3. *Вполне сингулярный функционал сингулярен.*

Обозначим множество вполне сингулярных функционалов через $\tilde{\Lambda}^*$, а ограниченно сингулярных — через Λ^*. Последний символ мы будем использовать также для обозначения множества ограничений ограниченно сингулярных функционалов на E_f.

Т е о р е м а 1. $E_f^* = L_{f^*} \oplus \Lambda^*$,

$$L_f^* = L_{f^*} \oplus (\Lambda^* + \tilde{\Lambda}^*).$$

Если же f удовлетворяет условию (B) *и только в этом случае,*

$$E_f^* = L_{f^*}, \quad L_f^* = L_{f^*} \oplus \tilde{\Lambda}^*.$$

Заметим, что I_{f^*} можно продолжить на все L_f^* следующим образом:

$$I_{f^*}(l^*) = \sup_{x_t \in L_f} (\langle x_t, l^*\rangle - I_f(x_t)).$$

При этом, если $l = y_t \oplus \lambda^*$, где λ^* — сингулярный функционал, то

$$I_{f^*}(l^*) = I_{f^*}(y_t) + I_{f^*}(\lambda^*), \quad I_{f^*}(\lambda^*) = \sup\langle x_t, \lambda^*\rangle, \ x_t \in \operatorname{dom} I_f,$$

и если L_f рассматривать вместе с нормой Орлича, то единичная сфера L_f^* есть множество

$$\{l^* \in L_f^* \mid I_{f^*}(l^*) \leqslant 1\}.$$

2. В этом пункте мы сформулируем задачу, ради которой предпринято настоящее исследование. Пусть T — ограниченная область в R^m с границей ∂T, μ — мера Лебега. Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — целочисленный m-ин-

декс (т. е. $\alpha_i \geqslant 0$ и целые), то символом D_α будет обозначаться оператор

$$D_\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_m^{\alpha_m},$$

где $|\alpha| = \Sigma \alpha_i$.

Пусть далее задан некоторый набор из n m-индексов $A = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$. Положим $D_A = (D_{\alpha^1}, \ldots, D_{\alpha^n})$, $|A| = \max\limits_{1 \leqslant J \leqslant n} |\alpha^J|$ и для всякой действительной функции u_t класса $W_\infty^{|A|}$

$$D_A u_t = (D_{\alpha^1} u_t, \ldots, D_{\alpha^n} u_t).$$

Если α и β — два m-индекса, то мы пишем $\alpha < \beta$ при условии, что $\alpha_i \leqslant \beta_i$ и $|\alpha| < |\beta|$, и $\alpha < A$, когда существует $J (1 \leqslant J \leqslant n)$ такое, что $\alpha < \alpha^J$.

Предположим, наконец, что для каждого индекса $\alpha < A$ на ∂T задана действительная функция r_t^α. Наша задача состоит в следующем:

$$\text{минимизировать } I_f(D_A u_t) \tag{1}$$

на совокупности всех действительных функций u_t класса $W_\infty^{|A|}$, удовлетворяющих на ∂T заданным граничным условиям

$$D_\alpha u_t \big|_{\partial T} = r_t^\alpha \quad (\alpha < A). \tag{2}$$

Такие функции мы будем в дальнейшем называть допустимыми. Очевидно

Предложение 4. *Пусть x_t — ограниченная функция на T со значениями в R^n. Для существования допустимой функции u_t такой, что $x_t = D_A u_t$ необходимо и достаточно, чтобы для любой функции y_t: $T \to R^n$ класса $C^{|A|}$, $y_t = (y_t^1, \ldots, y_t^n)$, удовлетворяющей уравнению*

$$\sum_{J=1}^{n} (-1)^{|\alpha^J|} D_{\alpha^J} y_t^J = 0, \tag{3}$$

и для произвольной допустимой $\bar{u}_t$ было справедливо равенство

$$\langle x_t - D_A \bar{u}_t, y_t \rangle = 0. \tag{4}$$

Если обозначить через M линейное многообразие решений (3), то равенство (4) определяет сдвинутое линейное многообразие, параллельное ортогональному дополнению M.

3. Таким образом, задача (1) с условием (2) может рассматриваться как частный случай следующей общей задачи. Пусть M — линейное многообразие в E_{f^*}, M^0 — его аннулятор в $E_{f^*}{}^* = L_f \oplus \Lambda$, $S = E_{f^*}{}^* / M^0$ — фактор-пространство $E_{f^*}{}^*$ по M^0 и $\gamma: E_{f^*}{}^* \to S$ — естественная проекция. Требуется

$$\text{минимизировать } I_f(l) \tag{5}$$

$$\text{при условиях } l \in E_{f^*}{}^*, \ \gamma(l) = \xi, \tag{6}$$

где ξ — фиксированный элемент S.

Предложение 5. *Если $\gamma^{-1}(\xi) \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} I_f \neq \phi$, то*

$$\inf_{l \in \gamma^{-1}(\xi)} I_f(l) = \inf_{x_t \in \gamma^{-1}(\xi) \cap L_f} I_f(x_t).$$

(Внутренность $\operatorname{dom} I_f$ рассматривается относительно сильной топологии L_f.)

Применительно к задаче (1), (2) смысл этого предложения следующий. Если M определяется условием (3), то из существования хотя бы одной допустимой u_t такой, что $D_A u_t$ принадлежит внутренности $\operatorname{dom} I_f$ следует, что нижняя грань не изменится, если перейти от множества допустимых функций ко всему $\gamma^{-1}(\xi)$.

Обозначим через M^{00} замыкание M в $\sigma(L_{f^*}, E_{f^*}{}^*)$. Для всяких $\xi \in S$, $y_t \in M^{00}$ положим

$$\langle \xi, y_t \rangle = \langle l, y_t \rangle,$$

где $l \in \gamma^{-1}(\xi)$ произвольно. (Это определение, очевидно, не зависит от выбора l). Задачу

$$\text{минимизировать } \langle \xi, y_t \rangle - I_{f^*}(y_t) \tag{7}$$

$$\text{при условии } y_t \in M^{00} \tag{8}$$

назовем двойственной к задаче (5), (6).

Теорема 2. 1) *Нижняя грань в задаче* (5), (6) *достигается.*

2) *Если f удовлетворяет условию* (B) *и* $\gamma^{-1}(\xi) \cap \operatorname{int} \operatorname{dom} I_f \neq \phi$, *то решения существуют в обеих задачах. При этом*

а) *минимум в* (5), (6) *равен максимуму в* (7), (8);

б) *если y_t^0 решение задачи* (7), (8), *то для того чтобы* $l^0 = x_t^0 \oplus \lambda^0$ ($\lambda^0 \in \Lambda$) *было решением задачи* (5), (6), *необходимо и достаточно выполнение трех условий:*

$$f(t, x_t^0) + f^*(t, y_t^0) = (x_t^0, y_t^0) \text{ почти всюду на } T,$$

$$\langle x_t^0 + \lambda^0, y_t \rangle = \langle \xi, y_t \rangle \text{ для всех } y_t \in M,$$

$$\langle \xi, y_t^0 \rangle - \langle x_t^0, y_t^0 \rangle \geqslant \langle \lambda^0, y_t \rangle \text{ для всех } y_t \in E_{f^*} \cap \operatorname{dom} I_{f^*};$$

в) *если существуют последовательность* $\{y_t^k\} \subset E_{f^*}$, *сходящаяся к* y_t^0 *в* $\sigma(L_{f^*}, E_{f^*}{}^*)$ *и число* $\varepsilon > 0$ *такие, что для всякого* $y \in R^n$ *с* $|y| < \varepsilon$ ($|\cdot|$ — *эвклидова норма*) $y_t^k + y \in \operatorname{dom} I_{f^*}$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots$, *то* $\lambda^0 = 0$ *и, следовательно, нижняя грань в задаче* (5), (6) *достигается в* L_f.

Возвращаясь к задаче (1), (2), следует заметить, что и здесь сингулярные элементы в решении можно, по-видимому, интерпретировать, как разрывы, как это сделано в [2] для одномерных задач.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958. [2] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, Функц. анализ, 3, в. 3, 61 (1969). [3] R. T. Rockafellar, J. Math. An. and Appl., 29 (1970). [4] R. T. Rockafellar, Pacif. J. Math., 24, 525 (1968). [5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, УМН, 22, в. 6, 51 (1968). [6] R. T. Rockafellar, J. Math. An. and Appl., 28, 4 (1969). [7] J. J. Moreau, C. R., 258, 1128 (1964). [8] А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 4, 725 (1968).