Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 5

УДК 517.948+513.88 *МАТЕМАТИКА*

В. М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ БИФУРКАЦИИ МАЛЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ МНОГОМЕРНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 22 V 1970)

В настоящей статье обосновывается возможность применения в общем случае проекционного перехода к конечномерному уравнению в задаче о точках бифуркации.

1. Рассматривается нелинейный оператор T, который действует в вещественном банаховом пространстве E. Предполагается, что оператор T определен в окрестности нуля 0 пространства E, что $T(0)=0$ и

$$T = A + B + \Omega, \tag{1}$$

где A — линейный оператор, B — однородный порядка $k (k \geqslant 2)$ дифференцируемый по Фреше оператор, производная которого $B'(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|B'(x) - B'(y)\| \leqslant c\rho^{k-2}\|x - y\| \qquad (\|x\|,\ \|y\| \leqslant \rho), \tag{2}$$

Ω удовлетворяет условию

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^{-k}\cdot\|\Omega x\| = 0.$$

Если дополнительно выполнено условие

$$\|\Omega x - \Omega y\| \leqslant 0(\rho^{k-1})\|x - y\|, \qquad (\|x\|,\ \|y\| \leqslant \rho),$$

то оператор T будем называть гладким.

Как известно, точками бифуркации уравнения

$$Tx = \lambda x \tag{3}$$

могут быть лишь точки спектра линейного оператора A. Пусть λ_0 — изолированная ненулевая точка спектра оператора A. Будем считать, что λ_0 — фредгольмовская в смысле М. Г. Крейна ([1]) точка спектра. Это значит, что корневое подпространство E_0 оператора A, отвечающее собственному значению λ_0, конечномерно, что оператор $A - \lambda_0 I$ нормально разрешим и что нётеров индекс оператора $A - \lambda_0 I$ равен нулю. Все эти свойства выполнены, если A вполне непрерывен. Будем считать, что корневое подпространство E_0 состоит только из собственных векторов. Тогда ([2]) определен единственный оператор P линейного проектирования на E_0, перестановочный с A. Оператор P определяется простой формулой

$$Px = f_1(x)e_1 + \ldots + f_n(x)e_n \qquad (x \in E), \tag{4}$$

где e_i образует базис с E_0, а функционалы f_i образуют базис в подпространстве нулей оператора $A^* - \lambda_0 I$, причем эти базисы должны быть связаны условием $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ (см., например, ([3, 4])).

Основную роль в наших построениях играет нелинейный оператор $B_0 = PB$. Этот оператор рассматривается только в n-мерном пространстве E_0. Если B определяется по k-ому дифференциалу оператора T, то при любом базисе в E_0 значения оператора B_0 имеют своими компонентами однородные порядка k многочлены от координат точки x. Отметим, что во всех приводимых ниже утверждениях можно было предполагать, что неравенство (2) выполнено не для оператора B, а для оператора B_0 в пространстве E_0.

Луч ty_0 $(t > 0,\ \|y_0\| = 1,\ y_0 \in E_0)$ назовем простым собственным лучом оператора B_0, если $B_0 y_0 = \gamma y_0$, $\gamma \neq 0$ и γ не является собственным значением линейного оператора $B_0'(y_0)$. Последнее условие означает, что отличен от нуля детерминант матрицы $B_0'(y_0) - \gamma I$.

Теорема 1. *Пусть у оператора B_0 есть по крайней мере один простой собственный луч и пусть оператор T гладкий.*

Тогда λ_0 является точкой бифуркации уравнения (3).

Теорема 2. *Пусть у оператора B_0 есть по крайней мере один простой собственный луч и пусть оператор T гладкий.*

Тогда λ_0 является точкой бифуркации уравнения (3).

2. Будем говорить, что множество $\mathfrak{N}$ ненулевых решений уравнения (3) является направленной по вектору y_0 ветвью собственных векторов оператора T, отвечающих точке бифуркации λ_0, если в $\mathfrak{N}$ есть точки сколь угодно малой нормы, если

$$\lim_{\|x\|\to 0}\left\|\frac{x}{\|x\|} - y_0\right\| = 0, \quad (x \in \mathfrak{N}),$$

если при $x \in \mathfrak{N}$ разность $\lambda(x) - \lambda_0$ сохраняет постоянный знак и

$$\lim_{\|x\|\to 0} \lambda(x) = \lambda_0$$

и, наконец, если значения $\lambda(x)$ $(x \in \mathfrak{N})$ заполняют некоторый промежуток, примыкающий к точке λ_0. В этом определении через $\lambda(r)$ обозначено то значение параметра λ, при котором точка $x \in \mathfrak{N}$ является решением уравнения (3).

Направленная ветвь $\mathfrak{N}$ называется правильной направленной ветвью, если $\mathfrak{N}$ является множеством значений однозначной непрерывной функции $x(\lambda)$.

Через $K(y_0;\ \varepsilon)$ обозначим конус в пространстве E, состоящий из таких элементов x, для которых при некотором $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $\|x - ty_0\| \leqslant t\varepsilon$. Множество ненулевых решений уравнения (3), лежащих в $K(y_0,\ \varepsilon)$ и имеющих норму не больше ρ, будем обозначать $\mathfrak{N}(y_0,\ \varepsilon,\ \rho)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть ε и ρ достаточно малы.*

Тогда $\mathfrak{N}(y_0,\ \varepsilon,\ \rho)$ является направленной по вектору y_0 ветвью собственных векторов оператора T, отвечающей точке бифуркации λ_0.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Пусть ε и ρ достаточно малы.*

Тогда $\mathfrak{N}(y_0,\ \varepsilon,\ \rho)$ является правильной направленной по вектору y_0 ветвью собственных векторов оператора T, отвечающей точке бифуркации λ_0.

В условиях теорем 3 и 4 знак разности $\lambda(x) - \lambda_0$ $(x \in \mathfrak{N}(y_0,\ \varepsilon,\ \rho))$ совпадает со знаком γ. Это же можно сказать и так: точки $x \in \mathfrak{N}(y_0,\ \varepsilon,\ \rho)$ являются решениями $x = x(\lambda)$ уравнения (3) при таких близких к λ_0 значениях λ, что $\gamma(\lambda - \lambda_0) > 0$. Функция $x(\lambda)$ однозначна лишь в условиях теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3 или теоремы 4.*

Тогда решения $x(\lambda) \in \mathfrak{N}(y_0,\ \varepsilon,\ \rho)$ имеют асимптотическое представление

$$x(\lambda) = \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\gamma}\right)^{1/(k-1)} y_0 + h(\lambda), \tag{5}$$

где $h(\lambda) = 0(|\lambda - \lambda_0|^{1/(k-1)})$ и

$$\|h(\lambda) - Ph(\lambda)\| \leqslant c|\lambda - \lambda_0|^{k/(k-1)}. \tag{6}$$

3. Будем говорить, что λ_0 является точкой простой бифуркации, если найдутся такие положительные числа ε_0 и ρ_0, что ненулевые решения уравнения (3) при $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$, лежащие в шаре $\|x\| < \rho$, образуют конечное число направленных ветвей собственных векторов. Если все эти направленные ветви правильные, то λ_0 является точкой правильной бифуркации.

Оператор B_0 назовем правильным, если каждый его собственный вектор $y_0 \in E_0$ $(By_0 = \gamma y_0)$ определяет простой собственный луч ty_0 $(t > 0)$.

Пусть $Tx_n = \lambda_n x_n$, $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$. Тогда последовательность $\|x\|^{-1}x_n$ компактна и ее предельными точками могут быть только собственные векторы оператора B_0. Отсюда и из теорем 3 и 4 вытекают следующие утверждения.

Теорема 6. *Пусть оператор B_0 — правильный, а оператор T — вполне непрерывный.*

Тогда λ_0 является точкой простой бифуркации уравнения (3).

Теорема 7. *Пусть B_0 — правильный, а T — гладкий.*

Тогда λ_0 является точкой правильной бифуркации уравнения (3).

4. Если E_0 двумерно, оператор B_0 имеет вид

$$B_0(\xi e_1 + \eta e_2) = \varphi(\xi, \eta) e_1 + \psi(\xi, \eta) e_2, \tag{7}$$

где e_1 и e_2 — базис в E_0, а $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ — однородные функции (порядок однородности равен k). Допустим, что вектор e_2 не является собственным вектором оператора B_0. Тогда собственные векторы можно искать в виде $y_0 = e_1 + \eta_0 e_2$ и определять η_0 из уравнения

$$\eta\varphi(1, \eta) - \psi(1, \eta) = 0. \tag{8}$$

В обычных случаях (8) — это алгебраическое уравнение порядка $k + 1$. Корень η_0 уравнения (8) называют простым, если

$$\varphi(1, \eta_0) + \eta_0\varphi'_\eta(1, \eta_0) - \psi'_\eta(1, \eta_0) \neq 0.$$

Теорема 8. *Векторы $te_1 + t\eta_0 e_2$ $(t > 0)$ и $-te_1 - t\eta_0 e_2$ $(t > 0)$ образуют простые собственные лучи оператора* (7) *в том и только в том случае, если η_0 является простым корнем уравнения* (8).

Важной характеристикой оператора (7) является индекс Пуанкаре γ_0 его особой точки. Если функции $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ являются однородными многочленами порядка k, то, как известно, γ_0 в случае четного k может принимать значения $0, \pm 2, \ldots, \pm k$, а при нечетном k — значения $\pm 1, \pm 3, \ldots$ $\ldots, \pm k$. В частности, при $k = 2$ число γ_0 может принимать одно из трех значений: 0, 2 или —2. Вычисление γ_0 производится ([5]) при помощи обобщенного ряда Штурма $T_0(\eta), T_1(\eta), \ldots, T_l(\eta)$, где $T_0(\eta) = \varphi(1, \eta)$, $T_1(\eta) = \psi(1, \eta)$, $T_{i-1}(\eta) = \varepsilon_i(\eta) T_i(\eta) - T_{i+1}(\eta)$ $(i = 1, \ldots, l)$ и $T_{l-1}(\eta) = \varepsilon_l(\eta) T_l(\eta)$. Если многочлен $T_l(\eta)$ не имеет вещественных корней, то оператор B_0 невырожден и $\gamma_0 = s(+\infty) - s(-\infty)$, где $s(-\infty)$ означает число перемен знака в ряде значений обобщенного ряда Штурма при отрицательных и больших по модулю значениях η, а $s(+\infty)$ — число перемен знака при больших положительных η. Из теоремы 8 вытекает

Теорема 9. *Пусть E_0 двумерно и пусть $\gamma_0 = -k$, где k — порядок однородности оператора B_0.*

Тогда оператор B_0 правильный и имеет ровно $2k + 2$ простых собственных луча.

5. Теоремы этой работы применимы для исследования, например, нелинейных интегральных уравнений. Здесь мы приведем одно неожиданное утверждение, с которым мы столкнулись при исследовании интегрального оператора

$$Tx(t) = \int_a^b G(t, s) f[s, x(s)]\, ds. \tag{9}$$

Этот оператор будем рассматривать в пространстве C непрерывных на $[a, b]$ функций. Для простоты будем считать, что ядро $G(t, s)$ непрерывно, симметрично и положительно определено. Функцию $f(s, u)$ $(a \leqslant s \leqslant b;$ $|u| \leqslant \rho)$ будем считать непрерывной по совокупности переменных и имеющей вид

$$f(s, u) = u + g(s)u^2 + o(u^2).$$

Тогда T можно представить в виде (1), где

$$Ax(t) = \int_a^b G(t, s)\, x(s)\, ds, \quad Bx(t) = \int_a^b G(t, s)\, g(s)\, x^2(s)\, ds.$$

Если λ_0 — собственное значение оператора A второй кратности, которому соответствуют две ортогональные и нормированные собственные функции $e_1(t)$ и $e_2(t)$, то оператор B определится формулой

$$B_0(\xi e_1 + \eta e_2) = e_1(t) \int_a^b g(s)\,[\xi e_1(s) + \eta e_2(s)]^2 e_1(s)\, ds + \\ + e_2(t) \int_a^b g(s)\,[\xi e_1(s) + \eta e_2(s)]^2 e_2(s)\, ds. \tag{10}$$

Теорема 10. *Индекс Пуанкаре γ_0, определенный по оператору* (10), *когда этот оператор невырожден, равен или нулю или -2.*

6. Простые доказательства основных теорем статьи получены нами с использованием некоторых идей А. Е. Гельмана и В. А. Треногина, развитых ими в теории ветвления решений; обширная библиография есть в справочнике ([6]). Нам кажется, что изложенные выше правила удобны для приложений, так как они не требуют построения и исследования уравнений разветвления (см. ([6])).

Результаты этой работы существенно развивают теоремы нашей статьи ([7]): удалось освободиться от всех трех основных ограничений работы ([7]); в ней предполагалось, что $n = 2$, $k = 2$ и что для всех, не совпадающих с λ_0 точек μ спектра оператора A, выполнено неравенство $|\mu| < \lambda_0$.

Настоящая работа выполнена в связи с замечаниями и пожеланиями Г. Е. Шилова по работе ([7]), я искренне ему благодарен.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
10 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, 12, в. 2 (1957). [2] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, общая теория, ИЛ, 1962. [3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1968. [4] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, «Наука», 1965. [5] М. А. Красносельский, А. И. Перов и др., Векторные поля на плоскости, 1963. [6] П. П. Забрейко и др., Интегральные уравнения, «Наука», 1968. [7] В. М. Красносельский, ДАН, 180, № 1 (1968).