Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 5

УДК 517.11:(51.01+519.4) *МАТЕМАТИКА*

А. В. КУЗНЕЦОВ, В. Я. ГЕРЧИУ

О СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИКАХ И ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 14 V 1970)

1. Кроме обычной классической логики (высказываний) и хорошо известной интуиционистской логики, строящейся на основе интуиционистского исчисления высказываний I (см. ([5])), часто рассматриваются промежуточные между ними логики. Из тех из них, разнообразие которых вызвано трудностями семантического построения логики, учитывающей интуиционистскую и конструктивистскую критику законов логики *, наиболее известны логика рекурсивной реализуемости С. Клини и Дж. Роуза (см. ([5])) и логика финитных задач Ю. Т. Медведева (см. ([13], [195])). Сложностью исследования этих логик было обусловлено построение других — более простых — промежуточных логик, а также идея общего изучения всех таких логик. Однако, даже для тех из них, которые конечно аксиоматизируемы (т. е. строятся на основе конечного списка аксиом и правил подстановки и modus ponens), остается открытым вопрос о том, для каждой ли существует алгоритм, позволяющий распознавать по формуле, верна ли она в этой логике. Надежда на его существование была связана с гипотезой о финитной аппроксимируемости суперинтуиционистских (суперконструктивных) исчислений высказываний (([8а]), стр. 52) **. Опровержение этой гипотезы — главный результат настоящей работы.

2. Исходим из обычного понятия формулы (логики высказываний) на основе алфавита, состоящего из знаков операций $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$, знаков для переменных a, b, c, a, ... и скобок, множество формул, содержащее все аксиомы I и замкнутое относительно подстановки и modus ponens, называется суперинтуиционистской логикой ([8г], [19в]). Наименьшую (по $\subseteq$) из таких логик, содержащих данные формулы $A_1, A_2, \ldots$, называем логикой, порожденной данными формулами, и обозначаем $[A_1, A_2, \ldots]$. Говорим, что из формулы A выводима формула B, если $B \in [A]$.

Средством обнаружения невыводимости часто является истинностная матрица, т. е. множество E с двуместными операциями $\&$, $\vee$ и $\supset$, одноместной операцией $\neg$ и подмножеством $E' \subseteq E$ «выделенных» элементов. Если эта матрица регулярна (т. е. из $\alpha \in E'$ и $(\alpha \supset \beta) \in E'$ следует $\beta \in E'$) ***, а аксиомы исчисления I принимают на ней только значения из E', то все это сохраняется и после отождествления каждых таких α и β, что $(\alpha \supset \beta) \in E'$ и $(\beta \supset \alpha) \in E'$. Матрица при этом превращается в псевдобулеву алгебру ([16]), т. е. систему $\langle M; \&, \vee, \supset, \neg \rangle$, являющуюся структурой (решеткой, латицей) $\langle M; \&, \vee \rangle$ с относительным псевдодополнением $\supset$ и псевдодополнением $\neg$ (см. ([1])), т. е. импликатив-

* Возможность различных уточнений содержательной конструктивной логики (т. е. логики конструктивного направления в математике) отразилась и в том, что интуиционистскую логику, которую многие именовали конструктивной, теперь опять называем интуиционистской. Аналогично изменились термины «конструктивное исчисление», «суперконструктивная логика» и т. п.

** Гипотеза эта является, правда, следствием более общей теоремы 3.4 из ([17]). Однако последняя (в ее доказательстве в ([17]) имелся заметный пробел) была опровергнута В. А. Янковым ([19в]).

*** О нерегулярных матрицах см. ([18]).

ной структурой $\langle M; \&, \vee, \supset\rangle$ ([4]) с наименьшим элементом 0 и наибольшим («выделенным») элементом 1. Говорим, что формула A *верна* на (псевдобулевой) алгебре $\mathfrak{A}$, если $A = 1$ на $\mathfrak{A}$. Множество всех формул, верных на $\mathfrak{A}$, является суперинтуиционистской логикой и называется *логикой алгебры* $\mathfrak{A}$. Говорим, что алгебра *отделяет* формулу A от формул $B_1, B_2, \ldots$, если на ней $B_1, B_2, \ldots$ верны, а A не верна. Если эта алгебра конечна, то формулу A называем *финитно отделимой* от $B_1, B_2, \ldots$. Логика L называется *финитно аппроксимируемой*, если всякая формула, не принадлежащая L, финитно отделима от L *. Упомянутая выше гипотеза равносильна тому, что для всяких формул $A_1, \ldots, A_n$ логика $[A_1, \ldots, A_n]$ (т. е. $[A_1 \& \ldots \& A_n]$) финитно аппроксимируема, т. е. что всякая формула, не выводимая из A, финитно отделима от A.


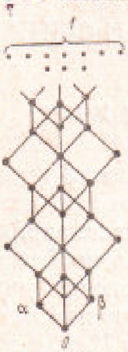
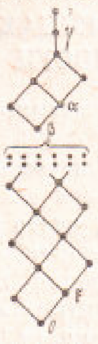

Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

3. Идея финитной аппроксимируемости восходит к работам Мак-Кинси ([11]), А. И. Мальцева и др. Универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ называется финитно аппроксимируемой ([12а]) **, если для всяких различных ее элементов α и β существует такой гомеоморфизм σ алгебры $\mathfrak{A}$ в некоторую конечную алгебру, что $\alpha\sigma = \beta\sigma$ (ср. ([12б])). Суперинтуиционистская логика L финитно аппроксимируема, если и только если финитно аппроксимируемы свободные алгебры соответствующего ей многообразия ([6, 12б]) всех тех псевдобулевых алгебр, на которых верны все формулы из L. Логика его свободной алгебры с бесконечным числом образующих совпадает с L. Поэтому, если из формулы A не выводима B, то B отделяется от A свободной алгеброй многообразия, соответствующего $[A]$, — и даже с конечным числом образующих (т. е. *конечнопорожденной*), так как число переменных в B конечно.

Импликативную структуру называем *геделевой* ([8б, 19а]), если ее элементы, отличные от 1, составляют подструктуру. Геделевыми являются как свободные псевдобулевы алгебры ***, так и те, которые подпрямо неразложимы. Ведь последние и только они обладают ([2, 10а]) *предпоследним элементом* ([3]), т. е. наибольшим из элементов, отличных от 1. Из этого же и известной теоремы Биркгофа (см. ([6])) вытекает (ср. ([10а])):

Лемма 1. *Если из формулы A не выводима B, то B отделяется от A некоторой конечнопорожденной алгеброй с предпоследним элементом.*

Говорим, что формула A *предверна* на алгебре $\mathfrak{A}$, если A не верна на $\mathfrak{A}$, однако верна на всякой ее собственной подалгебре и на всякой ее фактор-алгебре по нетривиальной конгруэнции. Такая алгебра $\mathfrak{A}$ подпрямо неразложима. На любой конечной геделевой алгебре ее характеристическая (по Янкову ([19а, г])) формула предверна. Имеет место (см. ([19г]), стр. 29—31):

Лемма 2. *Если A финитно отделима от $B_1, B_2, \ldots$, то A отделяется от них некоторой конечной алгеброй, на которой A предверна.*

4. Введем «степени» A^n и «относительные степени» A^nB так:

$$A^0B \leftrightharpoons A \supset B, \quad A^2B \leftrightharpoons A \& B, \quad A^1B \leftrightharpoons A,$$

$$A^{2n+3}B \leftrightharpoons A^{2n+1}B \supset A^{2n}B, \quad A^{2n+4}B \leftrightharpoons A^{2n+1}B \vee A^{2n+2}B,$$

$$A^{\infty}B \leftrightharpoons a \supset a, \quad A^n \leftrightharpoons A^n(a \,\&\, \neg a) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

* Ср. с понятием финитно-модельного свойства (fmp) ([10б, 18]).
** Или резидуально конечной (см. ([9])), или проверяемой ([8а]).
*** Ср. с известной теоремой Геделя о дизъюнкциях; см. ([5]), стр. 429.

Это оправдывается тем, что — как и в теории групп — для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует единственная (с точностью до изоморфизма) ц и к л и ч е с к а я (т. е. с одним образующим элементом) псевдобулева алгебра Z_n мощности n, и является она гомоморфным образом (тоже единственной) бесконечной циклической алгебры Z_∞, т. е. свободной псевдобулевой алгебры, состоящей из «степеней» образующего элемента α (рис. 1; ср. с ([14])),— ее фактор-алгеброй (при $n \geqslant 2$) по фильтру (см. ([16])) ∇_n, порожденному α^n. Подалгебра же свободной импликативной структуры с образующими α и β, состоящая из всех элементов вида $\alpha^i\beta$, изоморфна ∇_n при любом четном n. Логика LZ алгебры Z_∞ финитно аппроксимируема, так как все формулы, верные на всех алгебрах $Z_1, Z_2, \ldots$, ей принадлежат. Среди них — формулы

$$(a \supset b) \vee (b \supset c) \vee ((b \supset c) \supset c) \vee (c \supset (a \vee b)), \tag{1}$$

$$a^7 b \supset (c \vee (c \supset a^8 b)). \tag{2}$$

Т е о р е м а 1. *Логика LZ конечно аксиоматизируема, она порождается формулами* (1) *и* (2).

Последовательным соединением алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называем алгебру $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ (ср. ([17])), состоящую из таких ее подструктур $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$, изоморфных соответственно $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, пересечение которых содержит ровно один элемент — наибольший в $\mathfrak{A}'$ и наименьший в $\mathfrak{B}'$. Структуру называем т е с н о й, если в ней нет таких элементов α, β, γ и δ, что $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, α не сравним с δ, а β не сравним с γ.

Л е м м а 3. *Геделева структура является тесной, если и только если на ней верна формула* (1).

Л е м м а 4. *Всякая конечнопорожденная тесная псевдобулева алгебра есть последовательное соединение конечного числа циклических.*

Доказательство теоремы 1 опирается на леммы 1, 3 и 4, обзор подалгебр и гомоморфных образов алгебр вида $Z_1 + \ldots + Z_k$, совпадение логики алгебры $Z_\infty + \ldots + Z_\infty$ с LZ, а также то, что на алгебрах $Z_7 + Z_2$, $Z_9 + Z_2$ и $Z_2 + Z_7 + Z_2$ формула (2) не верна.

5. С формулой A а с с о ц и и р у е м логику, порожденную характеристическими формулами всех конечных алгебр, на которых A предверна. Если этих алгебр, попарно неизоморфных, бесконечно много, то формулу A называем р а з б р о с а н н о й. Примеры разбросанных формул: $\neg\neg a \vee \vee (\neg\neg a \supset (\neg b \vee (\neg b \supset a)))$, $\neg\neg a \vee \neg (a \& b) \vee (\neg (a \supset b) \supset a)$ * (предверны на алгебрах вида $(Z_{2n} \times Z_2) + Z_2$ **, начиная с некоторого n). При обобщении результата Янкова ([19в]) получается

Т е о р е м а 2. *Если A — разбросанная формула, то ассоциированная с A логика $\mathfrak{A}$ финитно аппроксимируемой не является: A не отделима финитно от $\mathfrak{A}$, хотя финитно отделима от любой формулы из $\mathfrak{A}$.*

6. Для контраста дадим следующее обобщение теоремы 2.2 из ([10б]):

Т е о р е м а 3. *Всякая логика, порожденная формулами, не имеющими отрицательных вхождений знака* $\vee$ ***, *финитно аппроксимируема.*

Это тоже следует из теоремы Попеля — Диего о конечности конечнопорожденной импликативной полуструктуры $\langle M; \&, \supset \rangle$ ****, так как любая такая формула у с т о й ч и в а в следующем смысле: если верна на псевдобулевой алгебре $\langle M; \&, \vee, \supset, \neg \rangle$, то верна и на всякой конечной подалгебре алгебры $\langle M; \&, \subset, \neg \rangle$ ($\vee$ доопределяется).

---

* Дедуктивно равна формуле F из ([19в]), стр. 3/4 (т. е. порождает $[F]$).

** Алгебры эти взяты из ([19а]). $\times$ означает прямое произведение.

*** Т. е. таких, когда он находится в области действия нечетного числа вхождений $\supset$ правее, чем он, и вхождений $\neg$.

**** А. В. Попель доложил ее в 1963 г. в Институте математики им. В. А. Стеклова АН СССР как теорему о формулах без $\vee$ (см. ([19г])); у Диего ([3]) она — для «алгебр Гильберта», т. е. для импликатур ([8д]) (но легко переносится на импликативные полуструктуры ([4, 10б])). Вытекает из предложения, аналогичного лемме 1 (ср. ([2])), поскольку выкидывание предпоследнего элемента уменьшает число образующих.

Заметим, что формула (2) устойчивой не является (так как алгебра $Z_7 + Z_3$, рассматриваемая без $\vee$, изоморфно вложима в Z_{11}). формула a^n устойчива только при $n \leqslant 8$ или $n = 10$, а формула $a^n b$ — при $n \leqslant 11$. Стоит здесь вспомнить проблемы Бернсайда о периодических группах (см. ([7], [9], [15])) и связь их с вопросами финитной аппроксимируемости *. Однако, аналогию с группами ослабляет то, что формула a^n при $n \geqslant 6$ верна на алгебре $Z_2 + Z_\infty$ с двумя образующими, имеющей бесконечно много попарно неизоморфных конечных фактор-алгебр, а формула $a^n b$ при $n \geqslant 14$ — на такой же алгебре, изображенной на рис. 2.

7. Опровержение гипотезы из ([8в]) найдено при анализе примера формулы, предверной на бесконечной тесной алгебре. Алгебра эта — $Z_\infty + Z_7 + Z_2$ (рис. 3), а формула — первая из следующих:

$$(a^7 b \supset (c \vee (c \supset a^6 b))) \vee d^8, \tag{3}$$

$$a^7 \supset (b \vee (b \supset a^6)), \tag{4}$$

$$a^9 b \supset (c \vee (c \supset a^8 b)). \tag{5}$$

Теорема 4. *Формула* (3) *от формул* (1), (4) *и* (5) *отделяется алгеброй* $Z_\infty + Z_7 + Z_2$, *но не отделима финитно от них.*

Последнее вытекает из лемм 2, 3 и 4 и того, что алгебра вида $Z_n + \mathfrak{B} + Z_2$ $(2 \leqslant n < \infty)$ не отделяет (3) от (1), (4) и (5).

Заметим, что логика алгебры $Z_\infty + Z_7 + Z_2$ не аппроксимируема финитно, но разрешима (разрешающий алгоритм ограничивается проверкой формулы на конечном подмножестве, мощность которого пропорциональна длине формулы); порождается она формулами (1), (4), (5), $a^7 b \supset (c \vee (c \supset (d \vee (d \supset a^6 b))))$, $a^7 b \supset ((c \supset d) \vee (d \supset c) \vee (c \supset a^6 b))$ и $a^7 (b^6 c) \supset (d \vee (d \supset a^6 (b^6 c)))$.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
14 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Биркгоф, Теория структур, ИЛ, 1952. [2] R. A. Bull, J. Symb. Logic, 29, 33 (1964). [3] A. Diego, Sur les algèbres de Hilbert, Paris, 1966. [4] Х. Карри, Основания математической логики, М., 1969. [5] С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИЛ, 1957. [6] П. Кон, Универсальная алгебра, М., 1968. [7] А. И. Кострикин, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, 3 (1959). [8] А. Н. Кузнецов, а) Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда, 2, М., 1956, стр. 145; б) V Всесоюзн. коллоквиум по общей алгебре, резюме, Новосибирск, 1963, стр. 32; в) Алгебра и логика, семинар, 2, в. 4, 47, Новосибирск (1963); г) ДАН, 160, 274 (1965); д) VII Всесоюзн. коллоквиум по общей алгебре, резюме, Кишинев, 1965, стр. 60. [9] А. Г. Курош, Теория групп, М., 1967. [10] C. G. McKay, а) Proc. Kohinkl. Nederl. Acad. Wet., A70, 363 (1967); б) J. Symb. Logic, 33, 258 (1968). [11] J. C. C. McKinsey, J. Symb. Logic, 8, 61 (1943). [12] А. И. Мальцев, а) Уч. зап. Ивановск. пед. инст., 18, 49 (1958); б) Алгебраические системы, М., 1970. [13] Ю. Т. Медведев, ДАН, 142, 1015 (1962). [14] I. Nishimura, J. Symb. Logic, 25, 327 (1960). [15] П. С. Новиков, С. И. Адян, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 212 (1968). [16] H. Rasiowa, R. Sikorski, The Mathematics of Metamathematics, Warszawa, 1963. [17] A. S. Troelstra, Proc. Kohinkl. Nederl. Acad. Wet., A68, 141 (1965). [18] R. Harrop, Proc. Cambr. Philos. Soc., 54, 1 (1958). [19] В. А. Янков, а) ДАН, 151, 1293 (1963); б) ДАН, 174, 302 (1967); в) ДАН, 181, 33 (1968); г) Изв. АН СССР, сер. матем., 33, 18 (1969).

* Из результатов А. И. Кострикина ([7]), П. С. Новикова и С. И. Адяна ([15]) вытекает, что при простом $n \geqslant 4381$ в многообразии групп, определяемом тождеством $a^n = 1$, его свободная группа с 2 образующими не аппроксимируема финитно.