Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 5

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. В. МАСЛЕННИКОВ

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 8 IV 1970)

В теореме 1 приводятся новые интегральные соотношения, связывающие различные решения проблемы Милна.

Математическая задача ставится следующим образом. Пусть $g(\mu)$, $\mu \in [-1, 1]$, есть индикатриса рассеяния, представляющая собой неотрицательную на $[-1, 1]$ функцию с суммируемым квадратом и такую, что $0 < g_0 \leqslant 1$. (Здесь и в дальнейшем $g_n = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} g(\mu) P_n(\mu)\, d\mu$, $n \geqslant 0$; $P_n(\mu)$ — n-й полином Лежандра.)

Пусть Ω — единичная сфера трехмерного пространства, $C(\Omega)$ — пространство непрерывных и $L_2(\Omega)$-суммируемых с квадратом модуля комплекснозначных функций на Ω; в $L_2(\Omega)$ определено скалярное произведение $(f, g) = \int\limits_{\Omega} f(\omega) \overline{g(\omega)}\, d\omega$ и норма $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$.

$g(\mu)$ порождает линейный вполне непрерывный оператор $\hat{g}$: $L_2(\Omega) \to C(\Omega)$, действующий по формуле

$$\hat{g}f(\omega) \equiv (\hat{g}f)(\omega) = \int\limits_{\Omega} g(\omega\omega') f(\omega')\, d\omega', \quad f \in L_2(\Omega).$$

Пусть далее $\mathscr{B}_\varepsilon$ — класс абстрактных функций $x(\tau)$ числовой переменной $\tau \in (0, \infty)$, обладающих следующими свойствами.

а) Для каждого $\tau \in (0, \infty)$ $x(\tau)$ есть элемент $L_2(\Omega)$.

б) Числовая функция $\|x(\tau)\|$ ограничена на каждой ограниченной части полупрямой $\tau > 0$.

в) Абстрактная функция $e^{-\varepsilon\tau} x(\tau)$ суммируема в смысле Бохнера ([3]) на $(0, \infty)$.

Фиксируем некоторый вектор $\mathbf{n} \in \Omega$. Пусть $\varepsilon \in (-1, 1)$, $x(\cdot) \in \mathscr{B}_\varepsilon$, и $\hat{g}x(\tau, \omega) \equiv (\hat{g}(x(\tau)))(\omega)$, $\tau > 0$, $\omega \in \Omega$. Оказывается, что при любом фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $e^{-\tau}\hat{g}x(\tau, \omega)$ суммируема по переменной τ на $(0, \infty)$. Отсюда вытекает, что следующая формула однозначным образом определяет оператор $\hat{A}$, действующий на $x(\cdot)$:

$$(\hat{A}x(\cdot))(\tau, \omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega\mathbf{n}} \displaystyle\int\limits_0^\tau e^{-(\tau-\rho)/\omega\mathbf{n}}\, \hat{g}x(\rho, \omega)\, d\rho & \text{при} \quad \omega\mathbf{n} > 0; \\ \hat{g}x(\tau, \omega) & \text{при} \quad \omega\mathbf{n} = 0; \\ \dfrac{1}{|\omega\mathbf{n}|} \displaystyle\int\limits_\tau^\infty e^{-(\rho-\tau)/|\omega\mathbf{n}|}\, \hat{g}x(\rho, \omega)\, d\rho & \text{при} \quad \omega\mathbf{n} < 0. \end{cases}$$

Оказывается, что классы $\mathscr{B}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (-1, 1)$, инвариантны относительно преобразования $\hat{A}$: если $x(\cdot) \in \mathscr{B}_\varepsilon$, то и $\hat{A}x(\cdot) \in \mathscr{B}_\varepsilon$.

Проблема Милна есть задача о решении уравнения

$$x(\cdot)=\hat{A}x(\cdot)+f(\cdot) \tag{1}$$

в классе $\overline{\mathscr{B}}=\bigcup\limits_{\varepsilon\in(-1,1)}\mathscr{B}_\varepsilon$. Здесь мы будем интересоваться так называемой проблемой Милна с инсоляцией, отвечающей уравнению (1) со свободным членом f специального вида:

$$f(\tau,\omega)=B(\omega)\exp(-\tau/\omega\mathbf{n}),\quad \tau>0,\quad \omega\in\Omega; \tag{2}$$

$$B\in L_2(\Omega),\quad B(\omega)=0\quad \text{при } \omega\mathbf{n}\leqslant 0. \tag{3}$$

Назовем задачей 1 задачу (1)—(3). Задача 1 с $B\equiv 0$ есть классическая однородная проблема Милна. (Физическая интерпретация: задача 1 есть задача о диффузии излучения через полупространство $\tau>0$ трехмерного пространства; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к границе полупространства, направленный внутрь него; $B(\omega)$ — распределение по направлениям ω-излучения, падающего на границу извне.)

В теории проблемы Милна фундаментальную роль играет характеристическое уравнение

$$(1+k\omega\mathbf{n})\psi(\omega)=g\psi(\omega). \tag{4}$$

Здесь k — комплексный параметр, $k\in Z_0$, где Z_0 — комплексная плоскость с разрезами вдоль действительной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до $+\infty$ (точки ± 1 принадлежат разрезам).

Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество значений параметра $k\in Z_0$, при которых (4) допускает нетривиальное решение $\psi\in L_2(\Omega)$. Оказывается, что $\mathfrak{R}$ целиком лежит в интервале $(-1,1)$ действительной оси, $\mathfrak{R}$ симметрично относительно точки $k=0$, $\mathfrak{R}$ непусто и не более чем счетно. Если $\mathfrak{R}$ бесконечно, то точки $k=\pm 1$ являются предельными точками $\mathfrak{R}$, и других предельных точек $\mathfrak{R}$ не имеет.

Существует точно одно $\lambda_0\in\mathfrak{R}$, $\lambda_0\geqslant 0$, такое, что при $k=\lambda_0$ (4) допускает знакопостоянное решение. С точностью до нормировки это решение единственно. Если $g_0=1$, то $\lambda_0=0$; если $g_0<1$, то $\lambda_0>0$. Интервал $(-\lambda_0,\lambda_0)$ не содержит точек множества $\mathfrak{R}$.

При $k\in\mathfrak{R}$ собственное подпространство (4) имеет конечную размерность p_k, причем $p_{-k}=p_k$, $k\in\mathfrak{R}$, и $p_{\lambda_0}=1$. Если $\mathfrak{R}$ содержит точки, отличные от нуля, то существует система функций

$$\{\psi_{kp}\,|\,k\in\mathfrak{R},\ k\neq 0,\ p=1,2,\ldots,p_k\} \tag{5}$$

такая, что

а) $\psi_{kp}(\omega)$ вещественно, $\psi_{kp}\in C(\Omega)$, $p=1,2,\ldots,p_k$, $k\in\mathfrak{R}$, $k\neq 0$;

б) $((\omega\mathbf{n})\psi_{kp},\psi_{kp'})=-\delta_{pp'}\cdot\operatorname{sgn}k$ при $1\leqslant p\leqslant p'\leqslant p_k$, $k\in\mathfrak{R}$, $k\neq 0$;

в) $\psi_{(-k)p}(\omega)=\psi_{kp}(-\omega)$, $\omega\in\Omega$, $p=1\div p_k$, $k\in\mathfrak{R}$, $k\neq 0$;

г) $\{\psi_{kp}\,|\,p=1,2,\ldots,p_k\}$ есть базис собственного подпространства уравнения (4), отвечающего данному значению параметра $k\in\mathfrak{R}$, $k\neq 0$.

Система функций (5), обладающая перечисленными свойствами, неединственна. Считаем, что из всех таких систем выбрана и зафиксирована какая-то одна, причем (в случае $g_0<1$) это сделано так, что $\psi_{\lambda_0,1}(\omega)>0$ всюду на Ω (такой выбор возможен).

Пусть $x(\cdot)$ — некоторое решение задачи 1, $x(\cdot)\in\mathscr{B}_\varepsilon$, $\varepsilon\in(-1,1)$. Тогда существует $x(0)\in L_2(\Omega)$ такая, что

а) $x(0,\omega)=B(\omega)$ при $\omega\mathbf{n}>0$;

б) $\lim\limits_{\tau=0+0}\|x(\tau)-x(0)\|=0$.

Изложенные выше утверждения обоснованы в [1].

Выделим теперь два варианта $1_{1,2}$ задачи 1, отвечающие двум фиксированным функциям $B=B_{1,2}$ в формулах (1)—(3). Пусть $\varepsilon_j\in(-1,1)$, и $x_j(\cdot) \in \mathscr{B}_\varepsilon{}^j$ — некоторые фиксированные решения задач 1_j, $j=1, 2$. Положим

$$D = \begin{cases} \frac{3}{4\pi}(1-g_1)(x_1(0), \omega\mathbf{n})(x_2(0), \omega\mathbf{n}), & \text{если } g_0 = 1; \\ 0, & \text{если } g_0 < 1; \end{cases}$$

и для каждого $\lambda \in \Re$

$$A_\lambda = \begin{cases} \frac{3}{4\pi}[(x_1(0), \omega\mathbf{n})(x_2(0), (\omega\mathbf{n})^2) - (x_2(0), \omega\mathbf{n})(x_1(0), (\omega\mathbf{n})^2)] & \text{при } \lambda = 0; \\ \operatorname{sgn}\lambda \cdot \sum_{p=1}^{p_\lambda} (x_1(0), (\omega\mathbf{n})\psi_{\lambda p})(x_2(0), (\omega\mathbf{n})\psi_{(-\lambda)p}) & \text{при } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Наконец, введем в рассмотрение оператор $\hat{\sigma}: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ по формуле $(\hat{\sigma}f)(\omega) = f(-\omega)$, $f \in L_2(\Omega)$.

Теорема 1. *Для всех* $\tau \geqslant 0$

$$(x_1(\tau), (\omega\mathbf{n})\overline{\hat{\sigma}x_2(0)}) = D\tau + \sum_{\lambda \in \Re \cap (-\varepsilon_2, \varepsilon_1)} A_\lambda e^{\lambda\tau}. \tag{6}$$

(*Черта сверху есть знак комплексного сопряжения; интервал* $(-\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ *есть пустое множество, если* $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant 0$).

Формула (6) позволяет установить некоторые новые связи между решениями проблемы Милна (как однородной, так и с инсоляцией) и, в частности, явным образом выразить коэффициенты асимптотических разложений решений задачи 1 (ср. [1]) через закон инсоляции B и краевые значения (при $\tau = 0$) решений однородной проблемы Милна. Впервые выражение такого типа было получено В. В. Соболевым [2].

Подробное изложение доказательства теоремы 1 и следствий из нее содержится в [4].

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Масленников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 97 (1968). [2] В. В. Соболев, ДАН, 179, № 1, 41 (1968). [3] Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962. [4] М. В. Масленников, Некоторые интегральные соотношения в теории переноса излучения, Препринт Инст. прикл. матем. АН СССР, № 6, 1970.