

С. И. ВАЙНШТЕЙН

ЗАДАЧА О ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

(Представлено академиком Р. З. Сагдеевым 3 III 1970)

Одна из основных проблем магнитогидродинамической турбулентности состоит в выяснении вопроса, устойчива ли турбулентная среда по отношению к слабым возмущениям магнитного поля, т. е. будут ли слабые магнитные поля нарастать со временем. Основная трудность — отсутствие малого параметра в обычной гидродинамической турбулентности ⁽¹⁾. Такой малый параметр можно найти в акустической турбулентности, а именно $\tau v / \lambda$, где τ — время корреляции в одной точке, λ — характерная длина волны, v — характерная скорость.

В задачах о генерации магнитного поля $\mathbf{H}$ поле скоростей $\mathbf{v}$ считается заданным, а $\mathbf{H}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad (1)$$

где ν_m — магнитная вязкость.

I. Будем полагать поле скоростей стационарным и распределенным в пространстве однородно и изотропно. Удобно перейти в $\mathbf{k} - \omega$ -пространство

$$\mathbf{v} = \int \frac{\mathbf{k}}{k} \Phi(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{k} d\omega.$$

Далее, усредняя по ансамблю, получим

$$\langle u_i(\mathbf{k}, \omega) u_j^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \frac{k_i k_j}{k^2} I(k, \omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'); \quad (2)$$

$$\langle v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + s) \rangle = \int \frac{k_i k_j}{k^2} f(k, s) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k};$$

$$f(k, s) = \int I(k, \omega) e^{-i\omega s} d\omega. \quad (3)$$

Пусть $E(k)$ — спектр мощности акустических колебаний, тогда $E(k) = 4\pi k^2 f(k, 0)$. Время корреляции можно ввести следующим образом:

$$\tau = \int d\mathbf{k} \int_0^\infty ds f(k, s) / \int d\mathbf{k} f(k, 0) = \pi \int d\mathbf{k} I(k, 0) / \int d\mathbf{k} f(k, 0). \quad (4)$$

Определим теперь $I(k, 0)$. Для этого представим плотность ρ и скорость следующим образом: $\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2$; $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ($\rho_0 \gg \rho_1 \gg \rho_2$, $\mathbf{v}_1 \gg \mathbf{v}_2$). Фурье-образы в $\mathbf{k} - \omega$ -пространстве величин ρ_1 , ρ_2 , $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ обозначим $\rho_1(\mathbf{k}, \omega)$, $\rho_2(\mathbf{k}, \omega)$, $\frac{\mathbf{k}}{k} \varphi_1(\mathbf{k}, \omega)$, $\frac{\mathbf{k}}{k} \varphi_2(\mathbf{k}, \omega)$. Линеаризация уравнений газодинамики дает, как известно, решение в виде акустических волн, причем

$$\rho_1(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{c} \rho_0 \varphi_1(\mathbf{k}, \omega);$$

$$\langle \varphi_1(\mathbf{k}, \omega) \varphi_1^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') f(k, 0)^{1/2} [\delta(\omega - ck) + \delta(\omega + ck)] \quad (5)$$

(c — скорость звука). Для получения $I(k, 0)$ запишем уравнение для поправки второго приближения (достаточно воспользоваться лишь уравне-

нием непрерывности):

$$\rho_0 k \varphi_2(\mathbf{k}, \omega) = \omega \rho_2(\mathbf{k}, \omega) - \int \rho_1(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)}{k_1} \varphi_1(\mathbf{k}_1, \omega_1) d\mathbf{k}_1 d\omega_1. \quad (6)$$

Умножим (6) на $\varphi_2^*(\mathbf{k}', \omega')$, воспользуемся (5) и усредним. Выражение в правой части (6) при умножении на комплексно сопряженное даст тогда момент четвертого порядка. Здесь можно воспользоваться приближением хаотических фаз и проинтегрировать по $d\mathbf{k}'$ и $d\omega'$, тогда получим ($\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{q}$):

$$\begin{aligned} I(\mathbf{k}, 0) &= \frac{1}{2c^2 k^2} \int \left[\frac{(\mathbf{k} \mathbf{q})^2}{q^2} + \frac{(\mathbf{k} \mathbf{q})(\mathbf{q} \mathbf{p})}{qp} \right] f(\mathbf{p}, 0) f(\mathbf{q}, 0) \delta(c\mathbf{p} - c\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \\ &= \frac{\pi k}{2c^3} \int_{k/2}^{\infty} f^2(q, 0) dq; \\ \pi &= \frac{\pi^2}{16c^3} \int k^2 f^2\left(\frac{k}{2}, 0\right) d\mathbf{k} / \int f(k, 0) d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7)$$

По порядку величины $\tau \approx (v^3/c^3)\lambda/v$, так что $\tau \ll \lambda/v$.

II. Для вывода уравнения для спектральной функции магнитного поля $B(\mathbf{k}, t)$ будем пользоваться фурье-представлением (1) в k -пространстве

$$\mathbf{H}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{k}, 0) e^{-k^2 v_m t} + i \int_0^t dt_1 e^{-k^2 v_m (t-t_1)} \int d\mathbf{q} \left[\mathbf{k} \left[\frac{\mathbf{p}}{p} \psi(\mathbf{p}, t_1) \mathbf{H}(\mathbf{q}, t_1) \right] \right]. \quad (8)$$

$\mathbf{H}(\mathbf{k}, t)$ и $\psi(\mathbf{k}, t) \mathbf{k}/k$ — фурье-образы от $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Воспользуемся рядом теории возмущений по скорости:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{k}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}^{(n)}; \quad \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{H}(\mathbf{k}, 0) e^{-v_m k^2 t}, \\ \mathbf{H}^{(n)} &= i \int_0^t dt_1 e^{-v_m k^2 (t-t_1)} \int d\mathbf{q} \left[\mathbf{k} \left[\frac{\mathbf{p}}{p} \psi(\mathbf{p}, t_1) \mathbf{H}^{(n-1)}(\mathbf{q}, t_1) \right] \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Ограничимся членами второго порядка по ψ (что оправдано, когда $\tau \ll \lambda/v$). Умножим (9) на $H^*(\mathbf{k}', t)$; будем полагать: 1) $\mathbf{H}(\mathbf{k}, 0)$ статистически не зависит от $\psi(\mathbf{k}, t)$; 2) v_m мало, так что в (9) можно положить $\exp(-v_m k^2 t) = 1 - v_m k^2 t$; 3) $\langle H_i(\mathbf{k}, 0) H_j^*(\mathbf{k}', 0) \rangle = B(k, 0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \times (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)$.

Усредняя получившееся выражение и интегрируя по $d\mathbf{k}'$, получим

$$\begin{aligned} B(k, t) &= B(k, 0) - 2B(k, 0) \left[\int_0^t ds (t-s) \int f(q, s) \frac{(\mathbf{k} \mathbf{q})^2}{q^2} d\mathbf{q} + v_m k^2 t \right] + \\ &+ \int_0^t ds (t-s) \int f(\mathbf{p}, s) B(\mathbf{q}, 0) \frac{(\mathbf{k} \mathbf{p})^2 q^2 + k^2 (\mathbf{q} \mathbf{p})^2}{p^2 q^2} d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из асимптотического поведения (10) при больших t ($t \gg \tau$) можно составить уравнение для $B(k, t)$:

$$\frac{\partial B(k, t)}{\partial t} + 2(\chi + v_m) k^2 B(k, t) = \pi \int I(\mathbf{p}, 0) B(\mathbf{q}, t) \frac{(\mathbf{k} \mathbf{p})^2 q^2 + k^2 (\mathbf{q} \mathbf{p})^2}{p^2 q^2} d\mathbf{p}; \quad (11)$$

$$\chi = \frac{\pi}{3} \int I(q, 0) dq = -\frac{\pi^2}{48c^3} \int k^2 f^2\left(\frac{k}{2}, 0\right) d\mathbf{k}.$$

(11) может быть переведено в r -пространство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial t} &= 2 \left\{ A B_1 + \frac{A_1}{r} B_1 - 2 \frac{v'}{r} B_1 \right\}; \\ B_1 &= r^{-3} \int \rho^2 B(\rho, t) d\rho; \quad B(r, t) = \int B(k, t) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d\mathbf{k}; \\ v(r) &= \pi \int I(k, 0) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{r})} d\mathbf{k}; \quad A = \chi + v_m - (rv'_1 + v_1); \end{aligned} \quad (12)$$

$$A_1 = 4(\chi + v_m) - (v'r + 2v_1'r + 4v_1); \quad v_1 = r^{-3} \int_0^r v(\rho) \rho^2 d\rho.$$

III. Будем искать собственные функции (12) подстановкой $B_1 = he^{-2\chi}$, далее подстановкой $z = h_1 \exp [1/2 \int_0^r d\rho A_1(\rho) / (\rho A(\rho))]$ перейдем к уравнению Шредингера

$$z'' + m(E - U)z = 0, \quad (13)$$

где «масса» $m = 1/A$, а потенциал:

$$U = 2v'r/r + 1/2 A (A_1/rA)' + A_1^2/4r^2 A.$$

При $r \rightarrow 0$ $U \rightarrow 2v_m/r^2$, при $r \rightarrow \infty$ $U \rightarrow 2(\chi + v_m)/r^2$. Волновая функция связанного состояния в потенциале соответствует неустойчивому (растущему) решению в данной задаче, собственная энергия состояния — инкременту нарастания с обратным знаком. Связанное состояние появляется, если у U есть потенциальная яма. Яма возникает, если $\chi \gg v_m$; действительно, в этом случае для r таких, что

$$v(0)/v_2(0) \gg r^2 \gg v_m/v_2(0), \quad \text{где } v_2(r) = \int \pi I(q, 0) q^2 dq, \quad U \approx v_2(0)/15.$$

Наличие потенциальной ямы не является достаточным условием существования собственных функций с $E < 0$ — яма может оказаться недостаточно глубокой, кроме того, собственная функция должна обладать свойствами корреляционной функции (ее фурье-образ $B(k, t)$ должен быть положительным). Для выяснения достаточного условия обратимся к уравнению (11). Подстановкой $B = he^{-2\chi}$ перейдем к задаче о собственных значениях интегрального уравнения. Для нахождения минимального E сформулируем вариационный принцип

$$E = \left[(\chi + v_m) \int k^2 h^2 dk - \pi/2 \int dk dp h(k) h(q) I(p, 0) \frac{(kp)^2 q^2 + k^2 (qp)^2}{q^2 p^2} \right] / \int h^2 dk; \quad (14)$$

$$\delta E = 0.$$

Придадим $h(k)$ следующий вид: при $k \leq k_1$ $h(k) = k_0^{-1/2} k_1^{-3} k^2 \times \exp(-k_1/2k_0)$, здесь $v_2(0)/v(0) \ll k_1^2 \ll v_2(0)/v_m$, $k_0^2 \approx v_2(0)/v_m$; при $k \geq k_1$ $h(k) = k^{-1} k_1^{-1/2} \exp(-k/2k_0)$.

При $k^2 < v_2(0)/v(0)$ сосредоточена лишь ничтожная часть энергии $h(k)$, поэтому правую часть (14) можно упростить:

$$E = \left[v_m \int k^2 h^2 dk - v_2(0)/5 \int \left\{ \frac{2}{3} h^2 + 2hh'k + h''hk^2 \right\} dk \right] / \int h^2 dk =$$

$$= -7/30 v_2(0) + 2k_0^2 v_m + v_2 \alpha (k_1/k_0),$$

где $\alpha(k_1/k_0)$ — малая величина порядка k_1/k_0 . Ясно, что если $k_0^2 \ll 7v_2(0)/60v_m$, то наше $h(k)$ придает функционалу (14) отрицательное значение. Следовательно, собственные функции задачи (11) с $E < 0$ существуют. Итак, акустическая турбулентность неустойчива по отношению к возмущениям магнитного поля. Нетрудно показать, что $\min U(r) = -7/30 v_2(0)$, поэтому инкремент нарастания поля

$$\gamma \approx v_2(0) = \frac{\pi}{24c^3} \int k^4 f^2 \left(\frac{k}{2}, 0 \right) dk. \quad (15)$$

Мы видим, что наиболее существенной величиной, определяющей возможность генерации поля, является

$$v(0)/v_m = 3\chi/v_m \approx (v^3/c^3) v\lambda/v_m = S = M^2 \text{Re}_m, \quad (16)$$

(M — число Маха, Re_m — магнитное поле Рейнольдса). Для неустойчивости должно выполняться $S \gg 1$.

IV. Поле скоростей акустической турбулентности потенциально. Вихревая компонента генерируется так же, как магнитная, так как уравнения для $\mathbf{H}$ и $\text{rot } \mathbf{v}$ аналогичны и $\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0)$ можно принять статистически независимым от потенциальной составляющей. Здесь для генерации наиболее существенной величиной является $S_\omega = M^3 \text{Re}$. Если $S_\omega \gg 1$, генерация вихрей аналогична вышеописанной неустойчивости; если $S_\omega \ll 1$ происходит рост вихревой компоненты v_ω как нелинейный эффект — явление, известное под названием акустического течения⁽²⁾.

Рост v_ω при $S_\omega \gg 1$ ограничивается турбулентной вязкостью: дело в том, что взаимодействие вихрь — вихрь носит обычный характер перекачки энергии в область больших k . Для грубой оценки энергии установившегося уровня v_ω заметим, что, так как ширина потенциальной ямы $\sim \lambda$, энергия v_ω^2 сосредоточена при $k \sim 1/\lambda$. Запишем уравнение для v_ω :

$$\frac{d}{dt} v_\omega^2 = \gamma v_\omega^2 - v_\omega^2 / \lambda.$$

В стационарном состоянии $v_\omega \sim \lambda \gamma$. Подсчитаем v_ω для следующего вида E : при $k < 1/\lambda$ $E=0$, при $1/\lambda \leq k \leq k_v$ $E = v^2 \lambda^{1-\alpha} k^{-\alpha}$, k_v — порог спектра, обусловленный вязкостью; при $k > k_v$ $E=0$. Здесь представляются 3 случая: 1) $\alpha > 3/2$, тогда $\gamma \sim M^3 v / \lambda$ и $v_\omega \sim M^3 v$; 2) $1 < \alpha < 3/2$, тогда $\gamma \sim M^3 (\lambda k_v)^{2-2\alpha} v k_v$, $k_v = \text{Re}^{2/(1+\alpha)} \lambda^{-1}$, $v_\omega \sim v M^3 \text{Re}^{2(3-2\alpha)/(1+\alpha)} \leq v S_\omega$ (при $\alpha \lesssim 3/2$, $v_\omega \sim M^3 v$); 3) $\alpha = 3/2$, тогда $\gamma \sim M^3 \ln(k_v \lambda) v / \lambda$, $v_\omega \sim M^3 v \ln \text{Re}$.

В заключение выражаю благодарность акад. Р. З. Сагдееву за обсуждение.

Сибирский институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
Сибирского отделения Академии наук СССР
Иркутск

Поступило
9 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ R. Kraichnan, S. Nagarajan, Phys. Fluids, 10, № 4, 859 (1967). ² Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, Введение в нелинейную акустику, «Наука», 1966.