Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 539.376+517.433 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Э. И. ГОЛЬДЕНГЕРШЕЛЬ

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПРОГИБЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ БАЛКИ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 18 V 1970)

1°. Будем рассматривать вязко-упругую балку переменного сечения конечной длины l, лежащую на упругом основании винклеровского типа.

Как известно ([5], [8]), прогиб $y(x,t)$ ее оси описывается следующей краевой задачей:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+Cy(x,t)+C\int_0^t K(t,\tau)\,y(x,\tau)\,d\tau=$$

$$=p(x,t)+\int_0^t K(t,\tau)\,p(x,\tau)\,d\tau;\quad 0\leqslant x\leqslant l;\quad 0\leqslant t<\infty, \tag{1}$$

$$U_i[y]=0, \tag{2}$$

где (2) — краевые условия, описывающие характер закрепления балки на концах, $p(x,t)$ — внешняя поперечная нагрузка, $K(t,\tau)$ — ядро, характеризующее наследственные свойства материала балки, $I(x)$ — момент инерции сечения балки относительно оси, C — коэффициент постели, E — мгновенный модуль упругости. Будем предполагать, что E и C постоянны.

Пусть $\alpha(t)$ — некоторая непрерывная и положительная при $t\geqslant 0$ функция. Будем предполагать, что

а) $\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}\int_0^t |K(t,\tau)|\,\dfrac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\,d\tau<\infty$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_E K(t,\tau)\,\dfrac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\,d\tau=0$ для любого измеримого органического множества $E\subset[0,\infty)$;

в) $l_K=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t K(t,\tau)\,\dfrac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\,d\tau$ существует.

Заметим, что если $K(t,\tau)=K_0(t-\tau)$ и

$$\alpha(t)=e^{-\theta t}, \tag{3}$$

где θ — некоторое вещественное число, то условия а) б) в) эквивалентны следующему:

$$\int_0^\infty |K_1(t)|\,e^{-\theta t}dt<\infty. \tag{4}$$

Нас интересует, при каких условиях существование равномерного по x предела

$$(\mathrm{L}p)(x)=\lim_{t\to\infty}p(x,t)\,\alpha(t) \tag{5}$$

влечет за собой существование равномерного по x предела

$$(\mathrm{L}y)(x)=\lim_{t\to\infty}y(x,t)\,\alpha(t) \tag{5''}$$

и как этот последний предел найти.

В частности, нас интересует, когда равенство

$$(\mathrm{L}p)(x) \equiv 0 \tag{6}$$

влечет за собой равенство

$$(\mathrm{L}y)(x) \equiv 0. \tag{6''}$$

2°. Обозначим через $Q(x, \xi)$ функцию Грина дифференциального оператора Λ_x:

$$\Lambda_x[y] = \frac{d^2}{dx^2}\left(I(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{C}{E}y$$

при краевых условиях (2) и через Q — действующий в банаховом пространстве $C[0, l]$ фредгольмов оператор:

$$(Qg)(x) = \int_0^l Q(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

С помощью тауберовых теорем типа Пэли — Винера — Гельфанда ([1–4]) можно доказать следующие предложения.

Теорема 1. *Если*

$$|E/Cq_0| > \lim_{s\to\infty} \sup_{s\leqslant t<\infty} \int_s^t |K(t, \tau)| \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\, d\tau, \tag{8}$$

где q_0 — наибольшее по модулю собственное значение оператора Q, то существование предела (5) *влечет за собой существование* (5″). *При этом*

$$(\mathrm{L}y)(x) = \frac{1}{C}\left(l_K Q + \frac{E}{C} I\right)^{-1} Q(\mathrm{L}p + LVp)(x). \tag{9}$$

Условие (8) также достаточно для того, чтобы из (6) следовало (6″).

Теорема 2. *Пусть $\alpha(t)$ имеет вид* (3) *и*

$$K(t, \tau) = K_0(t-\tau) + \widetilde{K}(t, \tau), \tag{10}$$

причем $K_0(t)$ удовлетворяет условию (4), *а $\widetilde{K}(t, \tau)$ — условиям* а), б), в) *и еще условию*

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{s\leqslant t<\infty} \int_s^t |\widetilde{K}(t, \tau)|\, e^{-\theta(t-\tau)} d\tau = 0. \tag{11}$$

Тогда условие

$$-\frac{E}{C} \neq q_i k_0(W); \quad \operatorname{Re} W \geqslant \theta; \quad q_i \in \sigma(Q), \tag{12}$$

где $k_0(W)$ — есть преобразование Лапласа функции $K_0(t)$, а $\sigma(Q)$ — спектр оператора Q (7) *в $C[0, l]$, достаточно для того, чтобы существование предела* (5) *вклекло за собой существование предела* (5″). *При этом имеет место формула* (9).

Если

$$k_0(W) + 1 \neq 0; \quad \operatorname{Re} W \geqslant \theta, \tag{13}$$

то условие (12) *не только достаточно, но и необходимо для этого.*

Теорема 3. *Пусть*

1) $\alpha(0) = 1$; $\quad \alpha(t+\tau) \leqslant \alpha(t)\cdot\alpha(\tau)$; $\theta = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln \alpha(t)}{-t} < \infty$;

2) $K(t, \tau)$ *представимо в виде* (10);

3) $\widetilde{K}(t, \tau)$ *удовлетворяет условиям* а), б), в) *и*

$$\lim_{s\to\infty} \sup_{t<t\leqslant\infty} \int_s^t |\widetilde{K}(t, \tau)| \frac{\alpha(t)}{\alpha(\tau)}\, d\tau = 0;$$

4) $\int\limits_0^\infty |K_0(t)|\,\alpha(t)\,dt < \infty.$

Тогда условие (12) *достаточно для того, чтобы из* (6) *следовало* (6″).

Аналогичные результаты получаются при исследовании нашим методом задачи о выпучивании вязко-упругого стержня ([6]).

Пользуюсь случаем выразить сердечную признательность Ю. Н. Работнову, Л. Х. Папернику, В. С. Екельчику и В. Н. Ривкинду за полезное обсуждение настоящей работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной плоскости, «Наука», 1964. [2] И. Гельфанд, Матем. сборн., 9 (51), 51 (1941). [3] Э. И. Гольденгершель, ДАН, 129, № 5, 971 (1959). [4] Э. И. Гольденгершель, Матем. сборн., 64, № 1, 115 (1964). [5] Ю. М. Работнов, Ползучесть элементов конструкций, «Наука», 1966. [6] J. N. Distefano, J. Structural Division. Proc. of the Am. Soc. of Civil Engineers, 91, № 3, 127 (1965). [7] А. Р. Ржаницын, Теория ползучести, 1968.