Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

И. И. БАВРИН

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ВЫПУКЛЫХ КРАТНОКРУГОВЫХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 23 VII 1970)

Автором ([1]) в случае ограниченных выпуклых полных n-круговых областей пространства C^n n комплексных переменных $(n \geqslant 2)$ установлена интегральная формула (4). Им же ([2]) в случае круга были получены обобщенные формулы Коши и Шварца, ассоциированные с данной системой функций $\omega_j(x) \in \Omega$ $(j=1,\ldots,m)$. В настоящей заметке эти обобщенные формулы и указанная выше формула (4) используются для установления обобщенных интегральных представлений в случае указанных выше n-круговых областей. При изложении придерживаемся обозначений и определений, использованных в ([1-5]).

Пусть функции $\omega_j = \omega_j(x) \in \Omega$ $(j=1,\ldots,m)$. Автором ([2]) построен оператор $L^{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}$ и введены в рассмотрение функции $C(z;\ \omega_1,\ldots,\omega_m)$ и $S(z;\ \omega_1,\ldots,\omega_m)$, являющиеся голоморфными в круге $|z|<1$. Этот оператор и указанные функции кратко будем обозначать соответственно через $L^{(\omega)}$, $C(z;\ \omega)$, $S(z;\ \omega)$ $(\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_m)$ и всюду ниже). С учетом таких более кратких обозначений установленные автором ([2]) для голоморфной в круге $|z|<R$ функции $f(z)$ обобщенные формулы Коши и Шварца, ассоциированные с данной системой функций $\omega_j(x) \in \Omega$ $(j=1,\ldots,m)$, перепишутся в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\ \omega\right) L^{(\omega)}[f(\rho e^{i\theta})]\, d\theta; \tag{1}$$

$$f(z) = i\,\mathrm{Im}\, f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\ \omega\right) \mathrm{Re}\, L^{(\omega)}[f(\rho e^{i\theta})]\, d\theta \tag{2}$$

(здесь $|z|<\rho$, $0<\rho<R$).

В случае ограниченных выпуклых полных n-круговых областей будет верна следующая

Теорема. *Пусть* $D \in (T)$, *функция* $f(z)$ $(z=(z_1,\ldots,z_n),\ n \geqslant 2)$ *голоморфна в* D *и* α — *число, равное* 0 *или* 1. *Тогда для* $k=0,1,2,\ldots$; $\tilde{k}=0,1,2,\ldots$ и любого ρ $(0<\rho<1)$

$$\underset{z \in D_\rho}{f}(z) = \alpha f(0) + \frac{1}{n+\alpha(1-n)}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{z_\nu^{\alpha}}{(2\pi)^n}\int d\omega_\tau \int d\omega_\theta \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} L_{\alpha+1,\,n-1}^{(n-1-\alpha)}\left[L_{A\tilde{A}}^{(-k,\,\tilde{k})}\left[C\left(e^{-i\varphi}\frac{u}{\rho};\ \omega\right)\right]\right] L^{(\omega)}\left[L_{A\tilde{A}}^{(k,\,-\tilde{k})}\left[F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\rho e^{i\varphi}, r, \theta)\right]\right] d\varphi\ ^{*} \tag{3}$$

$$(D_\rho = \rho D)\ ^{**}.$$

---

* Из участвующих здесь известных ([1-5]) обозначений во избежание смешения укажем на следующие:

$$\int d\omega_\tau = \int_{\Delta^*} d\tau_2 \ldots d\tau_n, \quad \int d\omega_\theta = \int_0^{2\pi} d\theta_2 \ldots \int_0^{2\pi} d\theta_n.$$

** В формуле (3) оператор $L^{(\omega)}$ действует на оператор $L_{A\tilde{A}}^{(k,\,-\tilde{k})}\left[F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\rho e^{i\varphi}, r, \theta)\right]$ как на функцию ρ.

При условии этой теоремы для $k=0,1,2,\ldots;\ \tilde{k}=0,1,2,\ldots$ и любого $\rho\ \ (0<\rho<1)$ имеет место и формула

$$\underset{z\in D_\rho}{f}(z)=\alpha f(0)+\frac{i}{n+\alpha(1-n)}\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^\alpha \operatorname{Im} f_\nu^{(\alpha)}(0)+$$

$$+\frac{1}{n+\alpha(1-n)}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{z_\nu^\alpha}{(2\pi)^n}\int d\omega_\tau\int d\omega_\theta\int_0^{2\pi} L_{\alpha+1,\,n-1}^{(n-1-\alpha)}\left[L_{A\tilde{A}}^{(-k,\,\tilde{k})}\left[S\left(e^{-i\varphi}\frac{u}{\rho};\ \omega\right)\right]\right]\times$$

$$\times\operatorname{Re} L^{(\omega)}\left[L_{A\tilde{A}}^{(k,\,-\tilde{k})}\left[F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\rho e^{i\varphi},\ r,\ \theta)\right]\right]d\varphi. \qquad (4)$$

В процессе доказательства интегральных формул (3), (4) используются приведенные выше формулы (1), (2) и интегральная формула (4) из статьи ([1]) автора.

Из всех следствий, вытекающих из формул (3), (4), укажем на два следующих:

1. $m=1,\ \omega_1(x)=(1-x)^\alpha\quad(-1<\alpha<+\infty)$.

В этом случае

$$C\left(e^{-i\varphi}\frac{u}{\rho};\,\omega\right)=\left(1-e^{-i\varphi}\frac{u}{\rho}\right)^{-(1+\alpha)},\quad S\left(e^{-i\varphi}\frac{u}{\rho};\ \omega\right)=2\left(1-e^{-i\varphi}\frac{u}{\rho}\right)^{-(1+\alpha)}-1,$$

$$L^{(\omega)}\left[L_{A\tilde{A}}^{(k,\,-\tilde{k})}\left[F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\rho e^{i\varphi},\ r,\ \theta)\right]\right]=\Gamma(1+\alpha)\,\rho^{-\alpha}D^{-\alpha}L_{A\tilde{A}}^{(k,\,-\tilde{k})}\left[F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\rho e^{i\varphi},\ r,\ \theta)\right],\ *$$

т. е. формулы (3), (4) переходят соответственно в формулы (1), (2) из статьи ([6]) автора **.

2. $\alpha=0,\quad \tilde{k}=0,\quad k=n-1,\quad A_j=(j,\ 1,\ldots,1)\ \ (j=1,\ldots,k)$.

В этом случае получаем

$$\underset{z\in D_\rho}{f}(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int d\omega_\tau\int d\omega_\theta\int_0^{2\pi} C\left(e^{-i\varphi}\frac{u}{\rho};\ \ \omega\right)L^{(\omega)}\,[L_{1,\,n-1}^{(n-1)}\,[F_0(\rho e^{i\varphi},\ r,\ \theta)]]\,d\varphi;$$

$$\underset{z\in D_\rho}{f}(z)=i\operatorname{Im} f(0)+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^n}\int d\omega_\tau\int d\omega_\theta\int_0^{2\pi} S\left(e^{-i\varphi}\frac{u}{\rho};\ \ \omega\right)\operatorname{Re} L^{(\omega)}\,[L_{1,\,n-1}^{(n-1)}\,[F_0(\rho e^{i\varphi},\ r,\ \theta)]]\,d\varphi.$$

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской
Москва

Поступило
14 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Баврин, ДАН, 186, № 2 (1969). [2] И. И. Баврин, ДАН, 187, № 3 (1969). [3] И. И. Баврин, ДАН, 169, № 3 (1966). [4] И. И. Баврин, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, 166, 3 (1966). [5] И. И. Баврин, ДАН, 181, № 2 (1968). [6] И. И. Баврин, ДАН, 187, № 2 (1969).

* $D^{-\alpha}$ — интегро-дифференциальный оператор произвольного порядка α $(-1<\alpha<+\infty)$ в смысле Римана — Лиувилля ($D^{-\alpha}$ действует на $L_{A\tilde{A}}^{(k,\,-\tilde{k})}\left[F_{0_\nu}^{(\alpha)}(\rho e^{i\varphi},\ r,\ \theta)\right]$ как на функцию ρ).

** В формуле (1) из ([6]) опечатка: вместо $L_{A\tilde{A}}^{(k,\,\tilde{k})}$ должно быть $L_{A\tilde{A}}^{(-k,\,\tilde{k})}$.