Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 1

УДК 539.121

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. Н. БАЙЕР, В. М. КАТКОВ, В. М. СТРАХОВЕНКО

РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком Г. И. Будкером 15 VII 1970)

В последнее время появился ряд работ, в которых рассматривается изменение свойств вакуума в присутствии классического электромагнитного поля. В ([1]) предпринята попытка вычисления аномального магнитного момента электрона, находящегося в магнитном поле; в ([2]) проведен расчет изменения массы электрона, его аномального магнитного момента, и массы, возникающей у фотона, в случае, когда внешнее поле является скрещенным: $|\mathbf{E}|=|\mathbf{H}|$, $\mathbf{EH}=0$. В ([3]) на базе результатов Швингера ([4]) исследуется распространение электромагнитных волн в области, занятой скрещенным полем. Результаты работ ([1, 2]) не согласуются друг с другом.

Весь этот круг вопросов может быть рассмотрен с помощью операторного метода, развитого в ([5]), и в тех же предположениях относительно характера внешнего поля. Для получения аномального магнитного момента и поправок к массе можно исходить из диаграммы собственной энергии электрона во внешем поле в e^2-порядке по взаимодействию с излучением, представив соответствующую амплитуду T в операторном виде. После проведения необходимых преобразований, операции распутывания (которая выполняется точно) и перехода к средним, получаем

$$T_{qq}^{(2)}=\frac{i\alpha}{(2\pi)^2}\sum_{\zeta'}\int\frac{d^3k}{\omega}\int dt\int_0^\infty d\tau\,[\bar{u}(\zeta,\mathbf{p}_2)\gamma^\mu u(\zeta',\mathbf{p}_2')\bar{u}(\zeta',\mathbf{p}_1')\gamma_\mu u(\zeta,\mathbf{p}_1)L_1- \tag{1}$$

$$-\bar{u}(\zeta,\mathbf{p}_1)\gamma^\mu v(\zeta',-\mathbf{p}_1')\bar{v}(\zeta',-\mathbf{p}_2')\gamma_\mu\bar{u}(\zeta,\mathbf{p}_2)L_2],$$

где $t_1=t-\tau/2$, $t_2=t+\tau/2$, $\mathbf{p}'=\mathbf{p}-\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_1\equiv\mathbf{p}(t_1)$, $\mathbf{p}_2\equiv\mathbf{p}(t_2)$;

$$L_1=\exp\left\{i\left[(\varepsilon-\omega)\tau-\int_{-\tau/2}^{\tau/2}d\tau'\sqrt{(\varepsilon-\omega)^2+2kp(t+\tau')}\right]\right\},$$

$$L_2=\exp\left\{-i\left[(\varepsilon+\omega)\tau+\int_{-\tau/2}^{\tau/2}d\tau'\sqrt{(\varepsilon+\omega)^2-2kp(t+\tau')}\right]\right\}.$$

Если устремить в (1) внешнее поле к нулю, то получающаяся амплитуда $T_{qq}^{(2)0}$ является точной для свободных частиц. Поскольку нас интересует только эффект, связанный с наличием внешнего поля, мы будем рассматривать разность $T_{qq}^{(2)}-T_{qq}^{(0)}\equiv T_Q^{(2)}$. Вычисление $T_Q^{(2)}$ проведем систематически, разлагая все выражения по степеням $1/\gamma$ ($\gamma=\varepsilon/m$) и сохраняя только старшие члены этого разложения. Показатель экспоненты L_2 никогда не бывает малым, поскольку большие члены $(\varepsilon+\omega)$ складываются; это приводит к уменьшению вклада второго члена в (1), вообще говоря, в γ^2 раз по сравнению с первым. Аналогично этому отсутствие компенсации в показателе экспоненты L_1 при $\omega>\varepsilon$ также приводит к подавлению интеграла по τ. Так что с принятой точностью достаточно в выражении (1) ограничиться первым членом в скобках и интегрировать по ω от 0 до ε.

Дальнейший расчет проводится так же, как и в ([5]). Если теперь представить $dT_Q^{(2)}/dt$ в виде суммы членов: $dT_Q^{(2)}/dt = T_1^{(2)} + T_2^{(2)}(\zeta \mathbf{v} \mathbf{s})$, где зависимость от спина выделена явно, то для $T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$ имеем

$$T_1^{(2)} = \frac{\alpha m^2}{6\pi\varepsilon}\int_0^\infty du\, \frac{5u^2+7u+5}{(1+u)^3}\left[-L_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)+\frac{i}{\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)\right],$$

$$T_2^{(2)} = -\frac{\alpha m^2}{2\pi\varepsilon}\int_0^\infty du\, \frac{u}{(1+u)^3}\left[L_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)+\frac{i}{\sqrt{3}}K_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)\right], \tag{2}$$

где

$$L_{2/3}(z) = \int_0^\infty dx\, x\cos\frac{3z}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right), \quad L_{1/3}(z) = \int_0^\infty dx \sin\frac{3z}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right),$$

$$\chi = \frac{e\hbar}{m^3c^4}\sqrt{|(F_{\mu\nu}p^\nu)^2|}, \quad F_{\mu\nu} = (E, H).$$

Приведем также выражения для $L_{2/3,\,1/3}$ при действительном $z = a > 0$:

$$L_{1/3}(a) = {}^1/_3\left\{K_{1/3}(a)+\frac{2\pi}{i\sqrt{3}}\left[J_{1/3}(ia)-A_{1/3}(ia)-J_{1/3}(-ia)+A_{1/3}(-ia)\right]\right\},$$

$$L_{2/3}(a) = {}^1/_3\left\{K_{2/3}(a)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[J_{2/3}(ia)-A_{2/3}(ia)+J_{2/3}(-ia)-A_{2/3}(-ia)\right]\right\}; \tag{3}$$

здесь K_ν, J_ν, A_ν — соответственно функции Макдональда, Бесселя и Ангера.

Амплитуда $T_Q^{(2)}$ связана простым соотношением: $dT_Q^{(2)}/dt = -\frac{m}{\varepsilon}\Delta M$ с ΔM-зависящей от внешнего поля поправкой к массе электрона в e^2-порядке по взаимодействию с излучением. С точностью до членов более высокого порядка по $1/\gamma$ смешанное произведение $(\zeta \mathbf{v}\mathbf{s})$ может быть однозначно представлено в инвариантной форме:

$$(\zeta \mathbf{v}\mathbf{s}) = -e\tilde{F}_{\mu\nu}p^\mu s^\nu \Big/ \sqrt{|(eF_{\lambda\sigma}p^\sigma)^2|} = -2\mu_0(\zeta \mathbf{H}_R)/m\chi = A; \qquad \tilde{F}_{\mu\nu} = {}^1/_2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta},$$

s^μ — 4-вектор поляризации, $\mu_0 = e/2m$, $\mathbf{H}_R$ — магнитное поле в системе покоя частицы. Тем самым величина ΔM принимает явно инвариантный вид. Отметим, что инвариант A не зависит от χ ($\mathbf{H}_R \sim \chi$). Представив ΔM в виде суммы $\Delta M = \Delta m + \Delta m_\zeta$, где только Δm_ζ зависит от спина электрона, имеем

$$\Delta m = \frac{\alpha m}{6\pi}\int_0^\infty du\, \frac{5u^2+7u+5}{(1+u)^2}\left[L_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)-\frac{i}{\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)\right],$$

$$\Delta m_\zeta = \frac{\alpha m}{2\pi}A\int_0^\infty du\, \frac{u}{(1+u)^3}\left[L_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)+\frac{i}{\sqrt{3}}K_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right)\right]. \tag{4}$$

В системе покоя частицы величину $\operatorname{Re}\Delta m_\zeta$ можно интерпретировать как энергию взаимодействия возникающего у частицы аномального магнитного момента с магнитным полем $\mathbf{H}_R$: $\operatorname{Re}\Delta m_\zeta = -\mu'(\zeta \mathbf{H}_R)$. Отсюда мы получаем выражение для аномального магнитного момента электрона, обусловленного радиационными эффектами в e^2-порядке и взаимодействием с внешним полем:

$$\frac{\mu'}{\mu_0} = \frac{\alpha}{2\pi}\,\frac{2}{\chi}\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^3}L_{1/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right). \tag{5}$$

Приведем также разложения величины μ'/μ_0 в случае предельных значений параметра χ:

$$\frac{\mu'}{\mu_0} = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi}\left[1 - 12\chi^2\left(\ln 1/x + C + {}^1/_2 \ln 3 - {}^{37}/_{12}\right) + \ldots\right], & \chi \ll 1; \\ \frac{\alpha\Gamma\left({}^1/_3\right)}{9\sqrt{3}\,(3\chi)^{2/3}}\left[1 + 6\,\frac{\Gamma\left({}^2/_3\right)}{\Gamma\left({}^1/_3\right)}\,(3\chi)^{-2/3} + \ldots\right] & \chi \gg 1. \end{cases} \tag{6}$$

Видно, что с возрастанием χ функция μ'/μ_0 монотонно убывает.

Проводившееся нами разложение по $1/\gamma$ в инвариантном виде соответствует разложению по f/χ $\left(f = \frac{e\hbar}{m^3c^4}\sqrt{|F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|}\right)$. В скрещенном внешнем поле $f \equiv 0$, поэтому для такого поля наши выражения являются точными, совпадая с результатами ([2]). Что касается результатов работы ([1]), то из найденного там точного промежуточного выражения при корректном вычислении для μ'/μ_0 получается формула (5).

Для рассмотрения аналитических свойств Δm, Δm_ζ нужно в (4) вернуться к интегральным представлениям функции L_ν, K_ν (см. (2), ([5])). Получаем

$$\begin{gathered} \Delta m = \frac{\alpha m}{6\pi}\int_0^\infty du\,\frac{5u^2 + 7u + 5}{(1+u)^3}\int_0^\infty d\tau\,\tau \exp\left[-i\,\frac{u}{\chi}\left(\tau + {}^1/_3\tau^3\right)\right], \\ \Delta m_\zeta = -i\,\frac{\alpha m}{2\pi}\,A\int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^3}\int_0^\infty d\tau \exp\left[-i\,\frac{u}{\chi}\left(\tau + {}^1/_3\,\tau^3\right)\right]. \end{gathered} \tag{7}$$

Функции Δm, Δm_ζ являются целыми функциями, экспоненциально спадающими в нижней полуплоскости переменной $z = 1/\chi$ при $\operatorname{Im} z \to -\infty$. Поэтому на действительной оси мнимая и реальная части Δm, Δm_ζ связаны соотношением

$$\operatorname{Re} f(z) = -\frac{\mathscr{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} f(z')\,dz'}{z' - z}; \quad f(z) = \Delta m, \Delta m_\zeta. \tag{8}$$

Поскольку нам известен явный вид функции f, то факт существования дисперсионного соотношения (8) очевиден. Однако существование дисперсионных соотношений в квантовой электродинамике следует из весьма общих соображений, отнюдь не опирающихся на явный вид входящих функций. Поэтому вычисление поправок Δm, Δm_ζ можно провести, опираясь на дисперсионные соотношения ([2]).

Пользуясь дисперсионными соотношениями, нетрудно получить и основные характеристики процесса распространения плоских электромагнитных волн в области пространства, занятой внешним полем. Применяя оптическую теорему и вводя показатель преломления соотношением $\tilde{n} = |\mathbf{k}|/\omega$, сразу имеем: $\operatorname{Im}\tilde{n}^2 = \frac{1}{\omega}\,W_{\gamma\to e^+e^-}$, где $W_{\gamma\to e^+e^-}$ — вероятность рождения пары поляризованным фотоном во внешнем поле. Аналитические свойства функций $\tilde{n}^2$ такие же, как и функций f в (7), т. е. $\tilde{n}^2$ не имеет особенностей в нижней полуплоскости переменной $z = 1/\varkappa$ $\left(\varkappa = \frac{e\hbar^2}{m^3}\sqrt{|(F_{\mu\nu}k^\nu)^2|}\right)$ и при $\operatorname{Im} z \to \infty$ спадает экспоненциально. Это вытекает из принципа причинности и, естественно, подтверждается прямым вычислением. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\operatorname{Re}\tilde{n}^2(z) = 1 - \frac{\mathscr{P}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\tilde{n}^2(z')\,dz'}{z' - z}, \tag{9}$$

где учтено, что $\operatorname{Re}\tilde{n}^2(\infty) = 1$. Из получающегося после подстановки в (9) $\operatorname{Im}\tilde{n}^2$ и взятия интеграла нетрудно восстановить поперечную часть тензора восприимчивости

$$\eta_{ij}^{\perp} \equiv (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij})^{\perp} = 2g_1(\varkappa)\, F_i^{(1)} F_j^{(1)} + 2g_2(\varkappa)\, F_i^{(2)} F_j^{(2)}\,, \tag{10}$$

$$g_{1,2}(\varkappa) = \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{(\varkappa H_0)^2}\int dy\, \varphi_{1,2}(y)\left[\frac{i}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi) - L_{2/3}(\xi)\right];$$

$$\varphi_1 = \frac{4\,\mathrm{ch}^2 y - 1}{\mathrm{ch}^2 y}\,,\quad \varphi_2 = \frac{4\,\mathrm{ch}^2 y + 2}{\mathrm{ch}^2 y}\,;\quad \xi = \frac{8\,\mathrm{ch}^2 y}{3\varkappa}\,;\ \mathbf{F}_1 = \mathbf{E}_\perp + [\mathbf{nH}],\ \mathbf{F}_2 = [\mathbf{nF}_1].$$

Из такого тензора получаются значения показателей преломления двух волн: $\tilde{n}_{1,2} = 1 + g_{1,2}|\mathbf{F}_{1,2}|^2$ и их частот: $\omega_{1,2} = |\mathbf{k}|\,(1 - g_{1,2}|\mathbf{F}_{1,2}|^2)$, совпадающее с результатами ([2]), если в наших выражениях считать внешнее поле скрещенным. Если рассматриваются поля, меньшие по величине, чем $H_0 = m^2c^3 / e\hbar$, то затухание волн мало и можно ввести групповую скорость соотношением: $\mathbf{v}^{(1,2)} = \partial\,\mathrm{Re}\,\omega_{1,2} / \partial\mathbf{k}$. Приведем выражение для групповой скорости двух волн:

$$\mathbf{v}_g^{1,2} = \mathbf{n}\,[1 - |\mathbf{F}_{1,2}|^2 (\mathrm{Re}\, g_{1,2} + \psi_{1,2})] + \mathbf{s}\,[2\,\mathrm{Re}\, g_{1,2} + \psi_{1,2}], \tag{11}$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\,,\ \mathbf{s} = H_\parallel \mathbf{H}_\perp + E_\parallel E_\perp + [\mathbf{EH}]_\perp;\ \mathbf{B}_\perp = \mathbf{B} - \mathbf{B}_\parallel\,,\ \mathbf{B}_\parallel = \mathbf{n}\,(\mathbf{nB});$$

$$\psi_{1,2} = \frac{\alpha}{3\pi}\frac{1}{(\varkappa H_0)^2}\int_0^\infty dy\, \varphi_{1,2}(y)\,[2L_{2/3}(\xi) + \xi L'_{2/3}(\xi)].$$

В скрещенном поле для конкретных случаев (определенное $\mathbf{n}$), рассмотренных в ([3]), из (11) получаются выражения, совпадающие с соответствующими формулами работы ([3]).

Новосибирский
государственный университет

Поступило
28 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Тернов, В. Г. Багров и др., 55, 2273 (1968). [2] В. И. Ритус, ЖЭТФ, 57, 2176 (1969). [3] Н. Б. Нарожный, ЖЭТФ, 55, № 8 (1968). [4] J. Schwinger, Phys. Rev., 82, 664 (1951). [5] В. Н. Байер, В. М. Катков, ЖЭТФ, 53, 1478 (1967).