Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 1

УДК 539.3 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Ф. ВЛАСОВ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ НАПРЯЖЕНИЙ МОРЕРА И МАКСВЕЛЛА

(Представлено академиком В. В. Новожиловым 8 VI 1970)

При решении пространственных задач статики упругого тела весьма удобно использовать тензор функций напряжений ([1]). Диагональными элементами этого тензора в декартовой системе координат являются функции Максвелла, а побочными — функции Морера. В ([1]) утверждается гармоничность функций Морера, что противоречит известному в теории упругости факту о лишь бигармоничности компонент напряжений ([2]). Этот вывод является следствием произвольного нормирования тензора функций напряжений устранением излишней деформации (([1]), § 27, п.п. 1, 2 и §29), когда произвольный вектор (V_1, V_2, V_3) полагается равным нулю.

Здесь дан вывод других уравнений для определения функций Морера. Исходными служат уравнения неразрывности деформаций интегро-дифференциального вида ([3]). В заключение тем же методом получаются и уравнения для функций Максвелла, уже известные в литературе ([1]).

1. Согласно принципу Кастильяно, вариации $\delta\sigma_{ij}$ компонент тензора напряжений не являются независимыми, а связаны между собой внутри области Ω, занятой деформирующимся телом, однородными уравнениями равновесия

$$\frac{\partial\delta\sigma_{ij}}{\partial x_i}=0. \tag{1,1}$$

Выбирая за независимые вариации $\delta\sigma_{ij}$ $(i=j=1,2,3)$, из вариационного уравнения Кастильяно

$$\delta U=\iint\limits_s(\bar{u}^i\cdot\delta X_{vi})\,ds \tag{1,2}$$

получим уравнения неразрывности деформаций

$$\mathscr{E}_{11}={}^1\!/_2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\iint\frac{\partial\mathscr{E}_{23}}{\partial x_1}dx_2dx_3+\int\mathscr{E}_{31}dx_3+\int\mathscr{E}_{12}dx_2\right)+\frac{\partial^2F_1(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}-$$
$$-\frac{\partial^2F_3(x_3,x_1)}{\partial x_1^2}\quad(1,2,3). \tag{1,3}$$

Полная система трех уравнений неразрывности получается из (1,3) круговой перестановкой индексов 1, 2, 3. Функции F_i $(i=1, 2, 3)$ совершенно произвольны. Попутно из (1,2) следуют и формулы для определения компонент вектора перемещений

$$u^1=\frac{1}{2}\left(-\iint\frac{\partial\mathscr{E}_{23}}{\partial x_1}dx_3dx_2+\int\mathscr{E}_{31}dx_3+\int\mathscr{E}_{12}dx_2\right)+\frac{\partial F_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}-$$
$$-\frac{\partial F_3(x_3,x_1)}{\partial x_1}\quad(1,2,3). \tag{1,4}$$

Если за независимые принять вариации $\delta\sigma_{ij}$ $(i\neq j)$, то получим другую форму уравнений неразрывности

$$\mathscr{E}_{12}=\int\frac{\partial\mathscr{E}_{11}}{\partial x_2}dx_1+\int\frac{\partial\mathscr{E}_{22}}{\partial x_1}dx_2+\frac{\partial f_1(x_2,x_3)}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2(x_3,x_1)}{\partial x_1}\quad(1,2,3) \tag{1,5}$$

и соответствующие этой форме соотношения для определения перемещений

$$u^1 = \int \mathscr{E}_{11} dx_1 + f_1(x_2, x_3) \quad (1, 2, 3). \tag{1,6}$$

Поясним, например, вывод уравнений (1,5) и формул (1,6) из вариационного соотношения (1,2). Исключим из первой вариации δU потенциальной энергии деформации слагаемые, содержащие $\delta\sigma_{ii}$, использовав для этой цели уравнения связи (1,1). Интегрируя по частям и применяя формулу Гаусса — Остроградского, получим вместо (1,2)

$$\iiint_\Omega \left\{ \mathscr{E}^{(ij)} - \left[\int \frac{\partial \mathscr{E}_{ii}}{\partial x_j} dx_i + \int \frac{\partial \mathscr{E}_{jj}}{\partial x_i} dx_j + \frac{\partial f_i(x_j, x_k)}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j(x_k, x_i)}{\partial x_i} \right] \right\} \delta\sigma_{ij} d\Omega +$$

$$+ \iint_s \left[\int \mathscr{E}^{(ii)} dx_i + f_i(x_j, x_k) - u^{(i)} \right] \delta X_{\nu i} ds = 0; \quad (i \neq j \neq k) \; (1, 2, 3). \tag{1,7}$$

Здесь $\delta X_{\nu i} = \delta\sigma_{ij} \cdot l^j$ $(j = 1, 2, 3)$; $\mathscr{E}^{(ij)} = \underline{\mathscr{E}}_{ij}$, а через l^j обозначены направляющие косинусы внешней нормали ν к поверхности s, ограничивающей область Ω. В силу произвольности и независимости вариаций $\delta\sigma_{ij}$ $(i \neq j)$ внутри Ω, а вариаций $\delta X_{\nu i}$ на поверхности s, непосредственным следствием уравнения (1,7) являются уравнения (1,5) и формулы, аналогичные формулам (1,6). Преобразованиями, исключающимися из вариационного уравнения Кастильяно (1,2) слагаемые, содержащие вариации $\delta\sigma_{ij}$ $(i \neq j)$, можно получить уравнения (1,3) и формулы (1,4). Нетрудно показать, что оба вида (1,3) и (1,5) уравнений неразрывности деформаций эквивалентны друг другу. Они могут быть также легко выведены ([3]) из уравнений Сен-Венана. Очевидно (это проверяется простой подстановкой), что выполнение уравнений (1,3) или (1,5) приводит к удовлетворению всех шести тождеств Сен-Венана. Таким образом устанавливается полная эквивалентность каждой из групп уравнений (1,3) и (1,5) и зависимостей Сен-Венана. Заметим, что произвольные функции F_i, f_i, входящие в (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), при решении конкретных задач довольно просто определяются из краевых условий. Эти функции являются своеобразным следом второй группы уравнений Сен-Венана ([4]), который остается при интегрировании первой группы. Функции F_i, f_i могут быть исключены, если перейти от деформаций к их представлениям, с помощью закона Гука, через функции напряжений. Выше всюду под $\int \Phi(x_1, x_2, x_3)\, dx_1$ понималась некоторая фиксированная первообразная функции Φ, а весь произвол выделен путем введения соответствующих произвольных функций.

2. Положим

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \quad (1, 2, 3), \quad \sigma_{12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} \right), \tag{2,1}$$

тогда из (1.5), используя закон Гука, получим систему

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu\Delta^2 \right) \varphi_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) (\varphi_2 + \varphi_3) = A_1, \tag{2,2}$$

$$A_1 = E \left[\int \frac{\partial f_2(x_3, x_1)}{\partial x_3} dx_1 + \int \frac{\partial f_3(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 + \Psi_1(x_2, x_3) \right], \tag{2,3}$$

где $\Psi_1(x_2, x_3)$ (1,2,3) — три произвольные функции своих аргументов.

Частному решению системы (2,2)

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{(1 - \mu^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (a_1 + a_2 + a_3) - \Delta^2 (a_2 + a_3 + \mu a_1) \right] \quad (1, 2, 3), \tag{2,4}$$

где

$$a_1 = E \left[\int \frac{\partial f_{20}(x_3, x_1)}{\partial x_3} dx_1 + \int \frac{\partial f_{30}(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 + \Psi_{10}(x_2, x_3) \right] \quad (1, 2, 3) \tag{2,5}$$

и

$$\Delta^2\Delta^2 f_{10} = f_1, \quad \Delta^2\Delta^2\Psi_{10} = \Psi_1 \quad (1,2,3), \tag{2,6}$$

соответствует естественное состояние упругого тела, при котором все компоненты напряжений и перемещений тождественно равны нулю, следовательно, без ограничения общности можно положить

$$f_{i0} \equiv \Psi_{i0} \equiv 0 \quad (i = 1,2,3), \tag{2,7}$$

а тогда уравнения для определения обобщенных функций Морера (2,2) примут вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu\Delta^2\right)\varphi_1 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(\varphi_2 + \varphi_3) = 0 \quad (1, 2, 3). \tag{2,8}$$

Перемещения

$$u^1 = \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}(\varphi_1 - \mu\varphi_2 - \mu\varphi_3) \quad (1, 2, 3). \tag{2,9}$$

Функции Морера Ψ_i ([1], [2]) связаны с обобщенными функциями Морера φ_i зависимостями $\Psi_i = \partial\varphi_i / \partial x_i$ $(n = 1,2,3)$.

Окончательные соотношения (2,8), (2,9) могут быть получены из интегралов (7,4), приведенных на стр. 24 монографии ([1]), однако для этого следует установить соответствующее нормирование тензора функций напряжений. Это нормирование производится исключением лишнего произвола, содержащегося в произвольном векторе. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное выражение для произвольного вектора (V_1, V_2, V_3)

$$V_1 = -\frac{1}{2(1+\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) \quad (1, 2, 3). \tag{2,10}$$

Полагая в (7,4) работы ([1]) функции $\gamma_{ii} \equiv 0$, а $\gamma_{ij} = -{}^1/_2 \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_k}$ $(i \neq j \neq k)$ (1,2,3), получим после некоторых преобразований равенства (2,8), а затем и (2,9).

3. Совершенно аналогично из (1,3) выводится система уравнений для определения функций Максвелла ([1])

$$\Delta^2\Phi_1 = \Delta^2\Phi_2 = \Delta^2\Phi_3 = \frac{1}{(2-\mu)}\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x_3^2}\right) \tag{3,1}$$

и формулы

$$u^1 = \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial x_1}(\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3) \quad (1, 2, 3). \tag{3,2}$$

Заметим, что (3,1), (3,2) были ранее без вывода указаны П. Ф. Папковичем ([5]) и выведены другим более сложным путем Ю. А. Крутковым ([1]).

Университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы
Москва

Поступило
30 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Крутков, Тензор напряжений и общие решения в статике теории упругости, Изд-во АН СССР, 1949. [2] М. М. Филоненко-Бородич, Теория упругости, М., 1959. [3] Б. Ф. Власов, Об уравнениях неразрывности для задач изгиба тонких плит в постановке Кирхгоффа, М., 1969. [4] Б. Ф. Власов, Прикладная механика, 5, в. 12 (1969). [5] П. Ф. Папкович, Теория упругости, Л., 1939.