Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 1

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Е. В. ВОРОНОВСКАЯ, Э. А. ЯРВ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРИТИЧЕСКИХ ИНТЕРВАЛОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 VII 1970)

Эта статья приводит некоторые новые результаты, полученные методом функционалов. Терминология, принятая в [1], сохраняется.

1°. Вспомогательные оценки.

Лемма 1. *Если* $R_{p+1}(x) = \prod\limits_0^p (x-\tau_i)$ — *резольвента* $T_p(x) = \cos p \arccos (2x-1)$, $T_p(\tau_i) = (-1)^{p-i}$, *то на* $[0, 1]$ *справедлива оценка*

$$|R'_{p+1}(x)| \leqslant 2p/2^{2p-1} \qquad (1)$$

с достижением на границах. При $0 < i < p$ $R'_{p+1}(\tau_i) = (-1)^{p-i}p/2^{2p-1}$.

Имеем

$$p\cdot 2^{2p-1}\cdot R_{p+1}(x) = T'_p(x)\,x\,(x-1); \quad p\cdot 2^{2p-1}\cdot R'_{p+1}(x) = (2x-1)\,T'_p(x) + x\,(x-1)\,T''_p(x),$$

и из дифференциального уравнения

$$x\,(1-x)\,T''_p(x) - \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot T'_p(x) + p^2T_p(x) = 0$$

получим $p\cdot 2^{2p-1}\cdot R'_{p+1}(x) = \dfrac{2x-1}{2}T'_p(x) + p^2T_p(x)$.

Отсюда по теореме В. А. Маркова

$$|R'_{p+1}(x)| \leqslant \frac{1}{p\cdot 2^{2p-1}}\left(\frac{1}{2}2p^2+p^2\right) = \frac{2p}{2^{2p-1}},$$

а при $x=\tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ $R'_{p+1}(\tau_i) = (-1)^{p-i}p/2^{2p-1}$.

Лемма 2. *Если обозначить* $R_{p+1}(x) \,/\, (x-\tau_k) = R_p^{(k)}(x)$, *то на* $[0,1]$ *при всех* $k = 0, 1, \ldots, p$ *справедливо*

$$|R_p^{(k)}(x)| \leqslant 2p/2^{2p-1} \qquad (2)$$

с достижением на границах при $k=0$ *и* $k=p$.

1) При $x=\tau_k$ имеем $R_p^{(k)}(\tau_k) = \lim \dfrac{R_{p+1}(x)}{x-\tau_k} = R'_{p+1}(\tau_k)$, т. е. по лемме 1 $|R_p^{(k)}(\tau_k)| = \dfrac{p\,|\,2p}{2^{2p-1}}$ (в обозначении $p\,|\,2p$ объединены оба варианта).

При $x=\tau_i$ $(i\neq k)$ $R_p^{(k)}(\tau_i) = 0$.

2) Оценим внутренние экстремумы при $x\neq\tau_i$; получим $[R_p^{(k)}(x)]' = [R'_{p+1}(x)(x-\tau_k) - R_{p+1}(x)]/(x-\tau_k)^2$; уравнение $R'_{p+1}(x) = R_{p+1}(x) \,/\, (x-\tau_k)$ определяет все экстремальные точки $x\neq\tau_k$. Согласно лемме 1 на $[0, 1]$ $|R_p^{(k)}(x)| \leqslant 2p\,/\,2^{2p-1}$.

2°. Длина критического интервала и свойства нормы.

Пусть $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ — любой заданный конечный отрезок-функционал и $\mu_p = \mu_p^*$ — его наилучшее продолжение. Если μ_p' и μ_p'' — границы критического интервала, то $\mu_p' \leqslant \mu_p^* \leqslant \mu_p''$ (см. [1]).

Теорема 1. *Если обозначить длину критического интервала* $\mu_p'' - \mu_p' = L_p$, *то*

$$L_p \leqslant N_{p-1}p\,/\,2^{2p-3}, \qquad (3)$$

где N_{p-1} — *норма отрезка-функционала* $\mu_0, \ldots, \mu_{p-1}, \mu_p^*$.

Действительно, заменив в этом отрезке μ_p^* на $\mu_p^* - h$, разложим отрезок по узлам $(\tau_k)_0^p$; получим для нагрузок выражения (1):

$$\Delta_k = (-1)^{p-k} \frac{R_p^{(k)}(\bar\mu) - h}{p \mid 2p} \cdot 2^{2p-1} \quad (k = 0, 1, \ldots, p).$$

Из всех $h_k = R_p^{(k)}(\bar\mu)$ находим $\max\limits_{(k)} | h_k | = \max\limits_{(k)} | R_p^{(k)}(\bar\mu) | \leqslant N_{p-1} 2p / 2^{2p-1}$; тогда $L_p \leqslant 2 \max\limits_{(k)} | h_k | \leqslant N_{p-1} p / 2^{2p-3}$.

Следствие. *Если $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p, \mu_{p+1}, \ldots$ — последовательность моментов, то для каждого ее частичного отрезка $(\mu_k)_0^p$; $(\mu_k)_0^{p+1}$; ... справедлива оценка* (3). *Таким образом, для всякой моментной последовательности последовательность длин критических интервалов $L_p \to 0$, и притом порядок малости не ниже $p / 2^{2p-3}$.*

Теорема 2. *Пусть отрезок*

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}, \mu_p' \tag{*}$$

имеет разложение по $(\tau_i)_0^p$ вида $\mu_k = \sum\limits_0^p \Delta_i' \tau_i^k \ (k = 0, 1, \ldots, p)$. *Тогда, если среди чисел*

$$2 | \Delta_0' |; | \Delta_1' |; \ldots ; | \Delta_{p-1}' |; 2 | \Delta_p' | \tag{**}$$

максимальное равно $\widetilde{\Delta}'^{(p)}$, то

$$L_p = \widetilde{\Delta}'^{(p)} p / 2^{2p-1}. \tag{4}$$

Возьмем отрезок

$$(\nu_k)_0^p = 0_0, 0_1, \ldots, 0_{p-1}, h_p \tag{***}$$

и разложим его по $(\tau_i)_0^p$ $\nu_k = \sum\limits_0^p \delta_i \tau_i^k$, где $\delta_i = (-1)^{p-i} \dfrac{h_p \cdot 2^{2p-1}}{p \mid 2p} \ (\neq 0)$.

Положим $\mu_p'' = \mu_p' + h_p''$; для того чтобы $h_p = h_p''$, необходимо и достаточно следующее: (δ_i и Δ_i' противоположных знаков, и хотя бы одно из $\Delta_i' = 0$) в отрезке $(\mu_i + \nu_i)_0^p$ с чебышевскими нагрузками $(\Delta_i' + \delta_i)$ должно быть $\operatorname{sgn}(\Delta_i' + \delta_i) = \operatorname{sgn} \delta_i$, причем хоть одна нагрузка равна нулю. Сравним систему чисел (**) с $\max\limits_{(i)} |\delta_i| = h_p \cdot 2^{2p-1} / p$; отсюда очевидно $h_p'' = \widetilde{\Delta}'^{(p)}(p) / 2^{2p-1}$, а так как $L_p = h_p''$, имеем $L_p = \widetilde{\Delta}'^{(p)} p / 2^{2p-1}$.

Следствие 1. *Из* (3) *и* (4) *следует $\widetilde{\Delta}'^{(p)} \leqslant 4N_{p-1}$, а для всей моментной последовательности $\widetilde{\Delta}'^{(p)} \leqslant 4N$, т. е. ограничено.*

Следствие 2. *Если определять L_p начиная с μ_p'', т. е. $\mu_p' = \mu_p'' - h_p'$, то $h_p' = h_p'' = L_p$,* и немедленно получим $\widetilde{\Delta}''(p) = \widetilde{\Delta}'(p) = \widetilde{\Delta}^{(p)}$.

Следствие 3. *Нагрузки Δ_i'' и Δ_i' связаны зависимостью*

$$\Delta_i'' = \Delta_i' + (-1)^{p-i} \frac{\widetilde{\Delta}(p)}{1 \mid 2}. \tag{5}$$

Следствие 4. *Обозначив нормы отрезков $(\mu') = \mu_0, \ldots, \mu_{p-1}, \mu_p'$ и $(\mu'') = \mu_0, \ldots, \mu_{p-1}, \mu_p''$ соответственно через N_p' и N_p'', имеем*

$$N_p'' = T_p(\bar\mu') + 2^{2p-1} L_p = - N_p' + 2^{2p-1} L_p.$$

Отсюда $N_p' + N_p'' = \widetilde{\Delta}^{(p)} p.$ (6)

3°. Приложения и примеры.

Теорема 3. *Если $\sigma \in (0, 1)$, то для отрезка $(\mu_k)_0^{p-1} = 1, \sigma, \ldots, \sigma^{p-1}$ имеет место*

$$L_p(\sigma) > p / 2^{2p-1}. \tag{7}$$

Пусть $\tau_s^{(p)} \leqslant \sigma \leqslant \tau_{s+1}^{(p)}$, p фиксировано и достаточно велико, чтобы оказалось $s \geqslant 1$ и $s + 1 \leqslant p - 1$. Разлагая $1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p-1}, \sigma^p - h_p$ по узлам $(\tau_i^{(p)})_{i=0}^p$, имеем нагрузки $\Delta_i = (-1)^{p-i} \dfrac{R_p^{(i)}(\sigma) - h_p}{p \mid 2p} 2^{2p-1}$.

Найдем L_p (¹); $\max\limits_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma)\ (>0)$ дает $\mu_p' = \sigma^p - \max\limits_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma)$; $\min\limits_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma)\ (<0)$ дает $\mu_p'' = \sigma^p - \min\limits_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma)$. Тогда

$$L_p(\sigma) = \mu_p'' - \mu_p' = \max_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma) - \min_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma).$$

1. Если $T_p(\tau_s) = +1$, то справа от σ имеется четное число узлов τ_i; тогда при $i > s$, $R_p^{(i)}(\sigma) < 0$ и, следовательно, $\min\limits_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma) = R_p^{(s+1)}(\sigma)$; при $i \leqslant s$ все сомножители в $R_p^{(i)}(\sigma)$ положительны и $\max\limits_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma) = R_p^{(s)}(\sigma)$.

2. Если $T_p(\tau_s) = -1$, то при $i > s$ имеем $\max\limits_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma) = R_p^{(s+1)}(\sigma)$; при $i \leqslant s$ $R_p^{(i)}(\sigma) < 0$ и $\min\limits_{(i)} R_p^{(i)}(\sigma) = R_p^{(s)}(\sigma)$.

Объединяя оба случая, получим $L_p(\sigma) = |R_p^{(s+1)}(\sigma) - R_p^{(s)}(\sigma)|$.
Далее $R_p^{(s+1)}(\sigma) - R_p^{(s)}(\sigma) = R_{p+1}(\sigma)(\tau_{s+1} - \tau_s)/(\sigma - \tau_{s+1})(\sigma - \tau_s) = P_{p-1}(\sigma)$. Полином $P_{p-1}(x)$ имеет своими корнями $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}, \tau_{s+2}, \ldots, \tau_p$; следовательно, между τ_{s-1} и τ_{s+2} имеется ровно один экстремум; но $P_{p-1}(\tau_s) = (-1)^{p-s+1} p / 2^{2p}$; $P_{p-1}(\tau_{s+1}) = P_{p-1}(\tau_s)$. Независимо от характера экстремума для $|P_{p-1}(x)|$ это обязательно максимум. Окончательно $L_p(\sigma) > p / 2^{2p-1}$.

С л е д с т в и е. *Согласно* (4), *имеем* $\Delta^{(p)} \geqslant 1$, *а согласно* (6) $N_p' + N_p'' \geqslant p$ *и хоть одна из норм расходится при* $p \to \infty$.

П р и м е р 1. Остановимся на частном случае теоремы 3. Пусть $\sigma = \tau_l = \tau$ — внутренний узел $T_p(x)$ и пусть для определенности $T_p(\tau) = -1$. Берем $(\mu_k)_0{}^p = A, A\tau, \ldots, A\tau^{p-1}, A\tau^p$ $(A > 0)$. Здесь, очевидно, $\mu_p' = A\tau^p$, так как $-T_p(x)$ — экстремальный с единственной нагрузкой $\Delta' = A$ в точке τ, т. е. $N_p' = A = \Delta^{(p)}$. $L_p = Ap / 2^{2p-1}$; по формуле (5) $\Delta_i'' = (-1)^{p-i} \dfrac{A}{1|2}$ при $i \neq l$ и $\Delta_l'' = 0$. Таким образом, $N_p'' = A(p-1)$, что, конечно, следует сразу из (6). Переходя от $p = p_1$ к некоторой бесконечной выборке $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ потребуем, чтобы отрезок $A, A\tau, \ldots, A\tau^{p_k}$ удовлетворял условию $A\tau^{p_k} = \mu_{p_k}'$. Такие числа (p_k) всегда найдутся посредством суперпозиции (¹), например, $-T_3[(1 + T_p(x))/2] = -T_{3p}(x)$, так как $-T_{3p}(\tau) = -T_3(0) = +1$; и по тому же образцу $-T_{3^2p}(x)$, $-T_{3^3p}(x), \ldots, -T_{3^kp}(x), \ldots$. Имеем выборку $p_1 = p$; $p_2 = 3p, \ldots, p_k = 3^{k-1} \cdot p, \ldots$. Для нее $N_{p_k}' = A$; $\Delta^{(p_k)} = A$; $N_{p_k}'' = A(p_k - 1) \underset{(k)}{\to} \infty$. Итак, в данном случае $\overline{\lim\limits_{p}}\, N_p'' = \infty$.

П р и м е р 2. Приведем случай, когда и $\overline{\lim}\, N_p'' = \infty$ и $\overline{\lim}\, N_p' = \infty$. Положим $\sigma = 1/2$ и $p \equiv 1 \pmod 2$, т. е. $T_p(1/2) = 0$. Здесь $R_p^{(i)}(1/2) = R_{p+1}(1/2)/(1/2 - \tau_i)$; так как $T_p'(x) = \dfrac{\sin p \arccos(2x-1)}{\sqrt{x(1-x)}}\, p$, то

$$T_p'(1/2) = (-1)^{(p-1)/2} \cdot 2p; \quad R_{p+1}(x) = \frac{T_p'(x)\, x(x-1)}{p \cdot 2^{2p-1}},$$

$$R_p^{(i)}(1/2) = (-1)^{(p+1)/2} \frac{1}{2^{2p}(1/2 - \tau_i)}.$$

Таким образом, для всех $\tau_i > 1/2$ $R_p^{(i)}(1/2)$ одного знака, а для $\tau_i < 1/2$ — противоположного;

$$\max_{(i)} \left| R_p^{(i)} \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2^{2p}[1/2 - \sin^2((p-1)\pi/4p)]} = \frac{1}{2^{2p}(\sin^2(p+1)\pi/4p - 1/2)}$$
$$\left(\sim \frac{p}{\pi \cdot 2^{2p-2}}\right).$$

Так как $\tau_{p-k} = 1 - \tau_k$ и $1/2 - \tau_{p-k} = -1/2 + \tau_k$, то нагрузки двух симметричных узлов по модулю равны. Далее, $h_p'' = h_p' = p / \pi \cdot 2^{2p-2}$; $L_p = p / \pi \cdot 2^{2p-3}$; т. е. $\widetilde{\Delta}^{(p)} = \frac{4}{\pi}$, $N_p' + N_p'' = \frac{4}{\pi} p$; но $N_p'' = T_p(1/2) + 2^{2p-1} \cdot p / \pi \cdot 2^{2p-2} = 2p / \pi = N_p'$. Итак, при нечетных p $\lim N_p' = \lim N_p'' = \infty$.

Уточним теорему 3. Пусть $\tau_s^{(p)} < \sigma < \tau_{s+1}^{(p)}$ и $T_p(\sigma) = \alpha_p$ $(\neq 0)$.

Имеем $T_p'(\sigma) = \frac{\sin p \arccos(2\sigma - 1)}{\sqrt{\sigma(1-\sigma)}} p = \pm \frac{p\sqrt{1-\alpha_p^2}}{\sqrt{\sigma(1-\sigma)}}$; обозначим

$$\sqrt{1-\alpha_p^2}\sqrt{\sigma(1-\sigma)} = \beta_p.$$

Теорема 4. *В отрезке $(\sigma^k)_0^p$ имеем для N_p' и N_p'' одинаковые минорантные оценки*

$$N_p' > \beta_p / \sin\frac{\pi}{2p} - 1, \quad N_p'' > \beta_p / \sin\frac{\pi}{2p} - 1. \tag{8}$$

При разложении $(\sigma^k)_0^p$ по узлам $(\tau_i)_0^p$ имеем $\delta_i = (-1)^{p-i} \frac{R_p^{(i)}(\sigma)}{p|2p} 2^{2p-1}$, где $R_p^{(i)}(\sigma) = -T_p'(\sigma)\,\sigma(1-\sigma)/p \cdot 2^{2p-1}(\sigma - \tau_i) = \pm\beta_p/2^{2p-1}(\sigma - \tau_i)$. Напомним, что при $\tau_i < \sigma$ все $R_p^{(i)}(\sigma)$ одного знака, при $\tau_i > \sigma$ — противоположного. Таким образом, $\max R_p^{(i)}(\sigma)$ и $\min R_p^{(i)}(\sigma)$ получатся при $i = s$ и при $i = s+1$.

Оценим их по модулю: $\left|\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix} R_p^{(i)}(\sigma)\right| = \frac{\beta_p}{2^{2p-1}\begin{matrix}|\sigma - \tau_s|\\ |\sigma - \tau_{s+1}|\end{matrix}}$; так как

$$|\sigma - \tau_s| \text{ и } |\sigma - \tau_{s+1}| < \tau_{s+1} - \tau_s = \sin\frac{\pi}{2p} \cdot \sin\frac{(2t+1)\pi}{2p},$$

имеем оценку $$\left|\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix} R_p^{(i)}(\sigma)\right| > \beta_p/2^{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p}.$$

Сохраняя обозначения теоремы 3, имеем:

$$\mu_p'' = \sigma^p - \min R_p^{(i)}(\sigma) > \sigma^p + \frac{\beta_p}{2^{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p}},$$

$$\mu_p' = \sigma^p - \max R_p^{(i)}(\sigma) < \sigma^p - \frac{\beta_p}{2^{2p-1}\sin\frac{\pi}{2p}},$$

а переходя к нормам N_p' и N_p''

$$N_p' = -T_p(\sigma) + 2^{2p-1}\max R_p^{(i)}(\sigma) > \left(\beta_p/\sin\frac{\pi}{2p}\right) - 1;$$

$$N_p'' = T_p(\sigma) + 2^{2p-1}|\min R_p^{(i)}(\sigma)| > \left(\beta_p/\sin\frac{\pi}{2p}\right) - 1.$$

Следствие 1. *Согласно* (4), *так как* $L_p > \beta_p/2^{2p+2}\sin\frac{\pi}{2p} > \beta_p p / 2^{2p-2}\pi$, то $\widetilde{\Delta}^{(p)} > 4\beta_p/\pi$.

Следствие 2. *Если в* $(\mu_k)_0^\infty = 1, \sigma, \ldots, \sigma^p, \ldots$ *найти выборку* $p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots \to \infty$ *такую, что в выражении для* β_{p_k} *все соответственные* $\alpha_{p_k} < \alpha < 1$, *т. е.* $\beta_{p_k} > \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{\sigma(1-\sigma)}$, *тогда и* $\overline{\lim_p} N_p' \to \infty$ и $\overline{\lim_p} N_p'' \to \infty$.

Ленинградский электротехнический институт связи им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 30 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. В. Вороновская, Метод функционалов и его приложения, 1963.