

Ю. Н. СУББОТИН

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА $W^k H_\omega^p$ СПЛАЙНАМИ ПОРЯДКА m

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 18 V 1970)

Пусть функция $f(x) \in W_p^k$, т. е. она имеет абсолютно непрерывную $(k-1)$ -ю производную и

$$\|f^{(k)}(x)\|_{L_p(0,1)} = \left\{ \int_0^1 |f^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty \quad (1 \leq p \leq \infty). \quad (1)$$

В работе рассматриваются вопросы приближения таких функций на $[0, 1]$ сплайнами $S_{m,n}(x)$ порядка m ($m \geq k$) с числом узлов $\{x_s\}$, не превосходящим n , в метрике L_q . Случай $m = k-1$ рассмотрен в (1). Сплайн $S_{m,n}(x)$ является кусочно-полиномиальной функцией, склеенной из полиномов порядка не выше m так, что производная $S_{m,n}^{(m-1)}(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, а $S_{m,n}^{(m)}(x)$ имеет разрывы разве лишь в узлах $\{x_s\}$. Рассмотрены случаи фиксированного и нефиксированного расположения узлов. При $p = q = \infty$ для фиксированных узлов $\{x_s\}$ и нечетных сплайнов этим вопросам посвящена довольно обширная литература (библиографию см., например, в (2)), там же при некотором соотношении между k и m рассмотрен случай $p = 2, q = \infty$. Отметим также интересный результат В. М. Тихомирова (3), относящийся к случаю $p = q = \infty$. В предлагаемой статье рассматриваются также приближения функций $f(x)$, определенных на всей вещественной оси и принадлежащих классу $W^k H_\omega^p$, интерполяционными сплайнами $S_m(x, h)$ (4, 5) порядка m , интерполирующими функцию $f(x)$ на равномерной сетке $\{sh\}$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). В дальнейшем $\omega_p(f^{(k)}, h) =$

$$= \sup_{|t| \leq h} \left\{ \int_0^1 |f^{(k)}(x+t) - f^{(k)}(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \text{ где в непериодическом случае про-}$$

изводную $f^{(k)}(x)$ за пределами отрезка $[0, 1]$ можно доопределить, например, нулем.

Теорема 1. Если функция $f(x) \in W_p^k$, то для любых $p, q \geq 1$, исключая случай $k = 1, 1 \leq p < 2q(q+1)^{-1}, p < q$, справедливо неравенство

$$\inf \|f - S_{k,n}\|_{L_p(0,1)} \leq C n^{-k} \omega_p(f^{(k)}, n^{-1}), \quad (2)$$

где $\inf$ берется по всем сплайнам $S_{k,n}(x)$ порядка k с числом узлов, не превосходящим n , и константа C зависит только от k .

Теорема 2. Если функция $f(x) \in W_p^k$ и $m \geq k$, то

$$\inf_{S_{m,n}} \|f - S_{m,n}\|_{L_p(0,1)} \leq C(k, m) n^{-k} \|f^{(k)}\|_{L_p(0,1)} \quad (p, q \geq 1), \quad (3)$$

где $S_{m,n}(x)$ — сплайн порядка m с числом узлов, не превосходящим n .

Для $m = k-1$ неравенство (3) доказано в (1).

Теорема 3. Существуют сплайны $S_{m,n}(x)$ и $S_{k,n}(x)$ такие, что ($m \geq k$)

$$\|f^{(i)} - S_{m,n}^{(i)}\|_{L_p(0,1)} \leq C(k, m) n^{-k+i} \|f^{(k)}\|_{L_p(0,1)} \quad (p, q \geq 1, 0 \leq i \leq k), \quad (4)$$

$$\|f^{(i)} - S_{k,n}^{(i)}\|_{L_q(0,1)} \leq C(k) n^{-k+i} \omega_p(f^{(k)}, n^{-1}) \quad (p, q \geq 1, 0 \leq i < k, k > 1). \quad (5)$$

Пример функции $f_n(x)$, $f_n^{(k)}(x) = (x - x_s)^{m+1-k} n^{m+1-k}$, $x_s \leq x \leq x_{s+1}$, $x_s = s/n$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$) показывает, что оценка (3) неулучшаема.

Пусть задана последовательность сеток

$$\Delta_s: 0 = x_0^{(s)} < x_1^{(s)} < \dots < x_{n_s}^{(s)} = 1, \quad n_s = sm \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Теорема 4. Если величины ($t_i = x_{im}$)

$$R_s = \max_{0 \leq i \leq s-1} \max_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\psi_i(t)}{\psi_i(x_{im+r})(t - x_{im+r})} \leq \bar{\beta} < \infty, \quad (7)$$

$$\psi_i(t) = (t - x_{im})(t - x_{im+1}) \dots (t - x_{i(m+1)}),$$

то существует сплайн $S_{m,n_s}(x)$ с узлами (6), что

$$\|f^{(i)} - S_{m,n_s}^{(i)}\|_{L_q(0,1)} \leq C_1 \|\Delta_s\|^{\gamma-i} \|f^{(k)}(x)\|_{L_p(0,1)}, \quad (8)$$

где $\|\Delta_s\| = \max_{0 \leq i \leq n_s-1} |x_{i+1}^{(s)} - x_i^{(s)}|$, $\gamma = k$ ($q \leq p$) и $\gamma = k + q^{-1} - p^{-1}$ ($q > p$).

Если $m = k$, то $\|f^{(k)}\|_{L_p(0,1)}$ можно заменить на $\omega_p(f^{(k)}, \|\Delta_s\|)$.

Если сплайн $S_m(x, h)$ интерполирует функцию $f(x) \in W^k L_p(-\infty, \infty)$ в узлах sh ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), тогда имеет место

Теорема 5. При $q \geq p$ и $m > k \geq 1$ справедливо неравенство

$$\|f^{(i)}(x) - S_m^{(i)}(x, h)\|_{L_p(-\infty, \infty)} \leq Ch^{k+1/q-1/p-i} \omega_p(f^{(k)}, h) \quad (0 \leq i \leq k-1), \quad (9)$$

где C зависит только от k и m и

$$\omega_p(f^{(k)}, h) = \sup_{|t| \leq h} \|f^{(k)}(x+t) - f^{(k)}(x)\|_{L_p(-\infty, \infty)}. \quad (10)$$

При доказательстве теорем 1 и 2 строится некоторое экстремальное множество узлов (для каждой функции свое) $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_s = 1$, и затем на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ определяется сплайн $S_{m,m,i}(x)$ из условий

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)}(x_r) &= S_{m,m,i}^{(\alpha)}(x_r), \quad \alpha = 0, 1, \dots, k-1; \\ S_{m,m,i}^{(\alpha)}(x_r) &= 0, \quad \alpha = k, \dots, m-1 \quad (m > k); \quad r = i, i+1. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом промежуточные узлы сплайна $S_{m,m,i}(x)$ выбираются в виде $x_i^{(i)} = x_i + \lambda_i(x_{i+1} - x_i)$, где числа λ_i не зависят от i и удовлетворяют неравенствам $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m = 1$.

Доказательство теоремы 1 сводится к вычислению величины

$$\beta = \inf_{\{x_i\}} \max_{0 \leq i \leq s-1} \beta_i, \quad (12)$$

$$\beta_i = \Delta x_i^{k p - 2 + p/q} \int_0^{\Delta x_i} dt \int_0^{\Delta x_i} |f^{(k)}(t + u + x_i) - f^{(k)}(u + x_i)|^p du, \quad (13)$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. При $kp - 2 + p/q \geq 0$ также как в ⁽¹⁾ доказывается, что $\inf$ достигается тогда, когда все β_i равны. Доказательство теоремы 2 протекает аналогично, только в данном случае

$$\beta_i = \Delta x_i^{kp-1+p/q} \int_0^{\Delta x_i} |f^{(k)}(u + x_i)|^p du. \quad (14)$$

Сравнение теорем 1 и 2 с теоремой 4 показывает, что при $q > p$ специальный выбор узлов обеспечивает лучший порядок сходимости.

При доказательстве теоремы 4 используется представление для $S_m^{(m)}(x, h)$, найденное в ⁽⁵⁾. При $p = q = \infty$ эта теорема доказана в ⁽⁶⁾.

Свердловское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
14 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, Матем. заметки, 7, в. 1, 31 (1970). ² I. N. Ahlberg, E. N. Nilson, I. L. Walsh, The Theory of Splines and their Applications, N. Y.—London, 1967. ³ В. М. Тихомиров, Матем. сборн., 80 (122), 290 (1969). ⁴ I. J. Schoenberg, Quart. Appl. Math., 4, 45, 112 (1946). ⁵ Ю. Н. Субботин, Матем. заметки, 1, в. 1, 63 (1967). ⁶ Ю. Н. Субботин, Матем. заметки, 7, в. 1, 43 (1970).