

Ю. М. СУХОВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ И РЕГУЛЯРНОСТЬ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ГИББСА ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 V 1970)

1. В недавней работе Х. Араки ⁽¹⁾ построено предельное состояние Гиббса для одномерных спиновых систем. В настоящей заметке предельное состояние Гиббса строится для одномерных непрерывных квантовых систем. Мы предполагаем, что взаимодействие является бинарным с финитным потенциалом $V(r)$, обладающим твердой сердцевиной радиуса $d > 0$.

2. Пусть $\Omega = (a_1, a_2)$ — конечный интервал на прямой R^1 . Введем фockовские пространства $\mathcal{H}_B(\Omega)$ бозонов и $\mathcal{H}_F(\Omega)$ фермионов и оператор N числа частиц (см., например, ⁽²⁾ *). Гамильтониан H является самосопряженным расширением симметрического оператора $\hat{H}$, порожденного уравнением Шредингера:

$$\hat{H}f(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j \neq k} V(|x_j - x_k|) f(x_1, \dots, x_n),$$

$$x_j \in \Omega, \quad j = 1, \dots, n, \quad \min_{j \neq k} |x_j - x_k| > d, \quad n = 1, 2, \dots$$

Мы рассматриваем самосопряженные расширения H оператора $\hat{H}$, определяемые следующими типами условий на границе $\partial\Omega^n$ куба $\Omega^n = \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_n$: $f|_{\partial\Omega^n} = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \nu} f|_{\partial\Omega^n} = 0$, где ν — внешняя нормаль.

Условие твердой сердцевины у $V(r)$ означает, что оба расширения рассматриваются в подпространствах $\mathcal{H}_B^{(d)}(\Omega) \subset \mathcal{H}_B(\Omega)$ и $\mathcal{H}_F^{(d)}(\Omega) \subset \mathcal{H}_F(\Omega)$, состоящих из цепочек функций

$$f = \{f_0, f_1(x), f_2(x_1, x_2), \dots\},$$

обращающихся в нуль при $\min_{j \neq k} |x_j - x_k| \leq d$. Символ (d) в дальнейшем опускается. Предельные объекты, описываемые в теоремах 1, 3 и 4, не зависят от выбора расширения.

Большой канонический ансамбль Гиббса в Ω порождает линейный положительный нормированный функционал (состояние) $G_{\tau, \beta, \alpha}$ на c^* -алгебрах $\mathcal{A}_B(\Omega)$ и $\mathcal{A}_F(\Omega)$ ограниченных операторов в $\mathcal{H}_B(\Omega)$ и $\mathcal{H}_F(\Omega)$ соответственно: для $A \in \mathcal{A}_B(\Omega)$ ($\mathcal{A}_F(\Omega)$)

$$G_{\tau, \beta, \alpha}(A) = \text{tr } A \rho_{\tau, \beta, \alpha},$$

где $\rho_{\tau, \beta, \alpha} = [\text{tr } \xi^N \exp(-\beta H)]^{-1} \xi^N \exp(-\beta H)$ — положительно определенный ядерный оператор в $\mathcal{H}_B(\Omega)$ (соответственно в $\mathcal{H}_F(\Omega)$) со следом 1 (матрица плотности). При наших предположениях о $V(r)$ этот функционал существует для всех $\xi > 0$ и $\beta > 0$.

* Пространства $\mathcal{H}_B(\Omega)$ и $\mathcal{H}_F(\Omega)$ можно ввести для любого измеримого по Лебегу подмножества прямой.

3. Пусть $\Omega \rightarrow \infty$ — направленное по включению множество конечных интервалов. Тогда c^* -алгебры $\mathfrak{A}_B(\Omega)$ и $\mathfrak{A}_F(\Omega)$ образуют прямые спектры c^* -алгебр (см. (4)). Пусть $\mathfrak{A}_B^{(0)}$ и $\mathfrak{A}_F^{(0)}$ — соответствующие индуктивные пределы, и $\mathfrak{A}_B = \overline{\mathfrak{A}_B^{(0)}}$, $\mathfrak{A}_F = \overline{\mathfrak{A}_F^{(0)}}$ (черта означает замыкание по норме). Состояние $G_{\zeta, \beta, \Omega}$ при фиксированном Ω можно считать заданным на семействах c^* -алгебр $\{\mathfrak{A}_B(\Omega')\}$ и $\{\mathfrak{A}_F(\Omega')\}$, где $\Omega' \subset \Omega$ *.

Теорема 1. При всех $\zeta > 0$ и $\beta > 0$ для любого $A \in \mathfrak{A}_B^{(0)}$ ($\mathfrak{A}_F^{(0)}$) существует предел

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} G_{\zeta, \beta, \Omega}(A) = G_{\zeta, \beta}^{(0)}(A).$$

Из теоремы 1 и теорем о продолжении положительных линейных функционалов следует, что на c^* -алгебре $\mathfrak{A}_B$ ($\mathfrak{A}_F$) существует единственное состояние $G_{\zeta, \beta}$, совпадающее на $\mathfrak{A}_B^{(0)}$ ($\mathfrak{A}_F^{(0)}$) с $G_{\zeta, \beta}^{(0)}$. Состояние $G_{\zeta, \beta}$ называется предельным состоянием Гиббса.

4. В c^* -алгебрах $\mathfrak{A}_B$ и $\mathfrak{A}_F$ действует однопараметрическая группа $\{T_\tau, -\infty < \tau < +\infty\}$ пространственных сдвигов (трансляций) (4). Предельное состояние $G_{\zeta, \beta}$ инвариантно относительно действия этой группы и обладает свойством регулярности, описываемым в следующей теореме:

Теорема 2. Пусть $A_1 \in \mathfrak{A}_B(\Omega_1)$, $A_2 \in \mathfrak{A}_B(\Omega_2)$ ($A_1 \in \mathfrak{A}_F(\Omega_1)$, $A_2 \in \mathfrak{A}_F(\Omega_2)$). Тогда

$$|G_{\zeta, \beta}(A_1 \cdot (T_\tau A_2)) - G_{\zeta, \beta}(A_1)G_{\zeta, \beta}(A_2)| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\| \gamma(\tau, \Omega_1, \Omega_2), \quad (1)$$

где (при любых фиксированных $\zeta > 0$ и $\beta > 0$)

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \gamma(\tau, \Omega_1, \Omega_2) = 0.$$

5. Приводимая ниже теорема устанавливает невозможность фазовых переходов (в смысле Эренфеста (5)) по ζ в рассматриваемых системах.

Теорема 3. Предел

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{a_2 - a_1} \ln \text{tr} \zeta^N \exp(-\beta H) = \Phi(\zeta, \beta)$$

определяет при всех $\beta > 0$ бесконечно дифференцируемую функцию переменного $\zeta > 0$.

Ближние результаты содержатся в работе (5).

6. Схема доказательства теорем 1 и 2. Пусть $\Omega_0 \subset \Omega$. Приведенная матрица плотности $\rho_{\zeta, \beta, \Omega}^{(\Omega_0)}$ определяется из условия

$$G_{\zeta, \beta, \Omega}(\pi_{\Omega_0}^{\Omega} A) = \text{tr} A \rho_{\zeta, \beta, \Omega}^{(\Omega_0)} \quad (2)$$

и является положительно-определенным ядерным оператором в $\mathcal{H}_B(\Omega_0)$ ($\mathcal{H}_F(\Omega_0)$) со следом 1 **. Ядро этого оператора мы обозначим $\rho_{\zeta, \beta, \Omega}^{(\Omega_0)}(x, \bar{y})$. Здесь $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$; $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$; $x_j, y_j \in \Omega_0$, $j = 1, \dots, n$; $\min [|x_j - x_h|, |y_j - y_h|] > d$; $n = 1, 2, \dots$

* При этом в обоих случаях, если $\{\pi_{\Omega'}^{\Omega}\}$ — гомоморфизмы прямого спектра ($\Omega' \subset \Omega$), то для $A \in \mathfrak{A}(\Omega')$

$$G_{\zeta, \beta, \Omega}(\pi_{\Omega'}^{\Omega} A) = G_{\zeta, \beta, \Omega'}(A \otimes E),$$

где E — тождественный оператор в $\mathcal{H}(\Omega \setminus \Omega')$ (см. (4)).

** Оператор $\rho_{\zeta, \beta, \Omega}^{(\Omega_0)}$ определяется из условия (2) однозначно. Можно показать, что он имеет вид

$$\rho_{\zeta, \beta, \Omega}^{(\Omega_0)} = [\text{tr} \zeta^N \exp(-\beta H)]^{-1} \text{tr}_{\mathcal{H}(\Omega \setminus \Omega_0)} \zeta^N \exp(-\beta H).$$

Теорема 4. При всех $\xi > 0$ и $\beta > 0$ для любого Ω_0 существует предел

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \rho_{\xi, \beta, \Omega}^{(\Omega_0)}(x, y) = \rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0)}(x, y),$$

равномерный при фиксированном $[l_1, l_2]$ по $\Omega_0 \subset [l_1, l_2]$ и $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega_0^n$, $n = 1, 2, \dots$

Предельное ядро $\rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0)}(\bar{x}, \bar{y})$ задает в $\mathcal{H}_B(\Omega_0)$, $\mathcal{H}_F(\Omega_0)$ — положительно-определенный ядерный оператор $\rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0)}$ со следом 1. Операторы $\rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0)}$ и $\rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0')}$ при $\Omega_0 \subset \Omega_0'$ связаны соотношением

$$\rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0)} = \text{tr}_{\mathcal{H}(\Omega_0' \setminus \Omega_0)} \rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0')}.$$

Метод доказательства теоремы 4 является модификацией известного матричного метода (transfer-matrix method) в классической статистической механике.

Теорема 1 является следствием теоремы 4 и леммы 1.

Л е м м а 1. Пусть $\rho_n(x, y)$ — последовательность ядер, задающих положительно-определенные ядерные операторы ρ_n со следом 1 в гильбертовом пространстве $L^2(M, \mu)$, $\mu(M) < \infty$. Предположим, что равномерно по $x, y \in M$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x, y) = \rho(x, y),$$

задающий положительно-определенный ядерный оператор ρ со следом 1. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n - \rho\|_1 = 0,$$

где $\|A\|_1 = \text{tr} \sqrt{AA^*}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ — последовательность собственных чисел оператора ρ , $e_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, — соответствующие собственные векторы. Из (3) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i, j} ((\rho_n e_i, e_j) - \lambda_i \delta_{ij})^2 = 0.$$

Мы покажем сейчас, что последовательность $\{\rho_n\}$ компактна в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ ядерных операторов в $L^2(M, \mu)$ с нормой $\|\cdot\|_1$. Для этого воспользуемся критерием компактности в банаховых пространствах с базисом⁽²⁾. В качестве базиса в $\mathfrak{B}$ естественно взять систему $\{E_{ij}\}$ матричных единиц для базиса $\{e_i(x), i = 1, 2, \dots\}$. Пусть

$$\rho_n^{(i_0)} = \sum_{i, j < i_0} (\rho_n e_i, e_j) E_{ij}, \quad \bar{\rho}_n^{(i_0)} = \sum_{i, j \geq i_0} (\rho_n e_i, e_j) E_{ij},$$

$$\tilde{\rho}_n^{(i_0)} = \sum_{i=1}^{i_0-1} \sum_{j=i_0}^{\infty} (\rho_n e_i, e_j) E_{ij}.$$

Очевидно, $\rho_n^{(i_0)}$ и $\bar{\rho}_n^{(i_0)}$ — положительно-определенные операторы, $\|\rho_n^{(i_0)}\|_1 + \|\bar{\rho}_n^{(i_0)}\|_1 = 1$, а также $\rho_n = \rho_n^{(i_0)} + \bar{\rho}_n^{(i_0)} + \tilde{\rho}_n^{(i_0)*} + \tilde{\rho}_n^{(i_0)}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $i_0 = i_0(\varepsilon)$ и $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы $\sum_{i \geq i_0} \lambda_i < \varepsilon/4$, и при $n > n_0(\varepsilon)$

$$\left| \|\rho_n^{(i_0)}\|_1 - \sum_{i=1}^{i_0-1} \lambda_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sum_{i \neq j} ((\rho_n e_i, e_j))^2 < \frac{\varepsilon^2}{16i_0^2}.$$

* Близкое утверждение получено И. Д. Новиковым.

Тогда при $n > n_0$

$$\begin{aligned} \|\rho_n - \rho_n^{(i_0)}\|_1 &\leq \|\tilde{\rho}_n^{(i_0)}\|_1 + 2\|\tilde{\rho}_n^{(i_0)}\|_1 = 1 - \|\rho_n^{(i_0)}\|_1 + 2\|\tilde{\rho}_n^{(i_0)}\|_1 \leq \\ &\leq 1 - \sum_{i=1}^{i_0-1} \lambda_i + \frac{\varepsilon}{4} + 2\|\tilde{\rho}_n^{(i_0)}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + 2\|\tilde{\rho}_n^{(i_0)}\|_1. \end{aligned}$$

Доказательство леммы завершается очевидным замечанием о том, что

$$\|\tilde{\rho}_n^{(i_0)}\|_1 \leq \sum_{i=1}^{i_0-1} \left[\sum_{j=i_0}^{\infty} ((\rho_n e_i, e_j))^2 \right]^{1/2} < i_0 \left[\sum_{i \neq j} ((\rho_n e_i, e_j))^2 \right]^{1/2}.$$

Теорема 2 является следствием леммы 1 и приводимой ниже теоремы 5, устанавливающей так называемое групповое свойство предельных ядер $\rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0)}(x, \bar{y})$. Пусть $x, \bar{y} \in \Omega_0^0$; $\bar{x}', \bar{y}' \in \Omega_0^1$; $T_\tau x' = (x'_1 + \tau, \dots, x'_l + \tau)$; $T_\tau \bar{y}' = (y'_1 + \tau, \dots, y'_l + \tau)$.

Теорема 5. *Имеет место неравенство*

$$|\rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0 \cup T_\tau \Omega_0^0)}(x \cup T_\tau x', \bar{y} \cup T_\tau \bar{y}') - \rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0)}(x, \bar{y}) \rho_{\xi, \beta}^{(\Omega_0)}(x', \bar{y}')| \leq \bar{V}(\tau, \Omega_0, \Omega_0^0),$$

где $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} |\tau|^\alpha \bar{V}(\tau, \Omega_0, \Omega_0^0) = 0$ при всех $\alpha > 0$.

Доказательство теоремы 3 опирается на теоремы 4 и 5 и проводится стандартным методом так называемых корреляционных функций.

Автор благодарит Я. Г. Синая за полезные обсуждения результатов и замечания при подготовке заметки.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Araki, Comm. Math. Phys., 14, № 2, 120 (1969). ² Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования, «Наука», 1965. ³ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1964. ⁴ O. E. Lanford, D. W. Robinson, J. Math. Phys., 9, № 7, 1120 (1968). ⁵ Б. И. Садовников, Е. М. Сорокина, ДАН, 188, № 4, 788 (1969). ⁶ К. Хуанг, Статистическая механика, «Мир», 1965.