Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 5

УДК 517.512.2 *МАТЕМАТИКА*

С. Б. ТОПУРИЯ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 21 V 1970)

В настоящей статье устанавливается одна примечательная особенность функций двух переменных и тригонометрических двойных рядов Фурье. В частности, строится непрерывная функция $F(x, y)$ двух переменных, имеющая почти в каждой точке произвольным образом заданную «скорость изменения» относительно совокупности переменных (x, y) и по каждой переменной в отдельности. Далее, продифференцированный ряд Фурье указанной функции, в зависимости от способа дифференцирования, суммируем почти в каждой точке к различным произвольно фиксированным и независимо друг от друга измеримым функциям.

Для изложения полученных результатов в данной работе приняты следующие обозначения: $R_0 = [0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$; $R = [-\pi \leqslant x \leqslant \pi;\ -\pi \leqslant y \leqslant \pi]$; $C(P; r)$ — окружность радиуса r с центром в точке $P(x, y)$; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $\Delta(F;\ x,\ y,\ h,\ l) = [F(x+h,\ y+l) - F(x,\ y+l) - F(x+h,\ y) + F(x,\ y)]/hl$, $\tilde{\Delta}(F;\ x,\ y,\ h,\ l) = [F(x+h,\ y+l) + F(x-h,\ y+l) + F(x+h,\ y-l) + F(x-h,\ y-l) - 4F(x, y)] / h^2 + l^2$.

$$C_1\Delta(F; x, y, h, l) = \frac{4}{h^2l^2}\int_0^h\int_0^l [F(t, \tau) - F(x, \tau) - F(t, y) + F(x, y)]\, dt\, d\tau,$$

$$C_1\tilde{\Delta}(F; x, y, h, l) = \frac{3}{hl(h^2+l^2)}\int_0^h\int_0^l [F(x+t, y+\tau) + F(x-t, y+\tau) + F(x+t, y-\tau) + F(x-t, y-\tau) - 4F(x, y)]\, dt\, d\tau,$$

$$\Delta_r^*(F; x, y) = \frac{2}{\pi r^3}\int_{C(P;r)} [F(t, \tau) - F(x, y)]\, dS,$$

$$\Delta_{21}(F; x, y, h, l) = \frac{1}{2h^2l}\int_0^h\int_0^l [F(x+t, y+\tau) - F(x-t, y+\tau) + F(x+t, y-\tau) - F(x-t, y-\tau)]\, dt\, d\tau,$$

$$\Delta_{12}(F; x, y, h, l) = \frac{1}{2hl^2}\int_0^h\int_0^l [F(x+t, y+\tau) - F(x+t, y-\tau) + F(x-t, y+\tau) - F(x-t, y-\tau)]\, dt\, d\tau,$$

$$\Delta_r^{(2)}(F; P) = \frac{1}{4\pi^2r^2}\int_{C(P;r)} dS_Q \int_{C(Q;r)} F(M)\, dS_M - \frac{1}{\pi r}\int_{C(P;r)} F(Q)\, dS_Q + F(P).$$

Будем говорить, что $\{h_n\}$ и $\{l_m\}$ являются λ-последовательностями, если из соотношения $1/\lambda \leqslant m/n \leqslant \lambda$ следует

$$0 < A(\lambda) \leqslant |h_n / l_m| \leqslant B(\lambda) < \infty.$$

Символ $(h, l)_\lambda \to 0$ означает, что $h \to 0$, $l \to 0$ и $1/\lambda \leqslant |h/l| \leqslant \lambda$, $\lambda \geqslant 1$.

Далее, будем рассматривать следующие производные от функции двух переменных:

$$D_\lambda F(x, y) = \lim_{(h, l)_\lambda \to 0} \Delta(F; x, y, h, l), \quad \widetilde{D} F(x, y) = \lim_{h, l \to 0} \widetilde{\Delta}(F; x, y, h, l),$$

$$\widetilde{D}_\lambda F(x, y) = \lim_{(h, l)_\lambda \to 0} \widetilde{\Delta}(F; x, y, h, l), \quad C_{1\lambda} DF(x, y) = \lim_{(h, l)_\lambda \to 0} C_1 \Delta(F; x, y, h, l),$$

$$C_{1\lambda} \widetilde{D} F(x, y) = \lim_{(h, l)_\lambda \to 0} C_1 \widetilde{\Delta}(F; x, y, h, l), \quad \Delta^* F(x, y) = \lim_{r \to 0} \Delta_r^*(F; x, y),$$

$$D_{21}^\lambda F(x, y) = \lim_{(h, l)_\lambda \to 0} \Delta_{21}(F; x, y, h, l),$$

$$D_{12}^\lambda F(x, y) = \lim_{(h, l)_\lambda \to 0} \Delta_{12}(F; x, y, h, l),$$

$$\Delta^{*(2)} F(x, y) = \lim_{r \to 0} \frac{16 \Delta_r^{(2)}(F; x, y)}{r^4}.$$

Теорема 1. *Пусть $f_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4,$— произвольные измеримые и почти всюду конечные функции на R_0. Тогда существует такая непрерывная функция $F(x, y)$, что почти всюду на R_0:*

$$D_{21}^\lambda F(x, y) = f_1(x, y), \quad D_{12}^\lambda F(x, y) = f_2(x, y),$$

$$D_\lambda F(x, y) = f_3(x, y), \quad \widetilde{D}_\lambda F(x, y) = f_4(x, y).$$

Отметим, что в теореме 1 производную $D_\lambda F(x, y)$ можно заменить производной $C_{1\lambda} DF(x, y)$, а $\widetilde{D}_\lambda F(x, y)$ — производной $C_{1\lambda} \widetilde{D} F(x, y)$ или $\Delta^* F(x, y)$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x, y)$ — произвольная измеримая и почти всюду конечная функция на R_0. Тогда существует такая непрерывная функция $\Phi(x, y)$, что почти всюду на R_0*

$$\widetilde{D} \Phi(x, y) = \varphi(x, y).$$

Теорема 3. *Пусть $\{h_n\}$ и $\{l_m\}$, $h_n \neq 0$, $l_m \neq 0$,— произвольные λ-последовательности, стремящиеся к нулю. Существует такая непрерывная функция $F(x, y)$, что, каковы бы ни были измеримые и почти всюду конечные на R_0 функции $f_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$, найдутся λ-подпоследовательности $\{h_{n_k}\}$ и $\{l_{m_j}\}$, для которых почти всюду на R_0 выполнены соотношения:*

$$\lim_{(n_k, m_j)_\lambda \to \infty} \Delta(F; x, y, h_{n_k}, l_{m_j}) = f_1(x, y),$$

$$\lim_{(n_k, m_j)_\lambda \to \infty} \widetilde{\Delta}(F; x, y, h_{n_k}, l_{m_j}) = f_2(x, y),$$

$$\lim_{(n_k, m_j)_\lambda \to \infty} \Delta_{21}(F; x, y, h_{n_k}, l_{m_j}) = f_3(x, y),$$

$$\lim_{(n_k, m_j)_\lambda \to \infty} \Delta_{12}(F; x, y, h_{n_k}, l_{m_j}) = f_4(x, y).$$

Заметим, что в теореме 3 $\Delta(F;\, x,\, y,\, h,\, l)$ можно заменить выражением $C_1\Delta(F;\, x,\, y,\, h,\, l)$, а $\bar{\Delta}(F;\, x,\, y,\, h,\, l)$ — выражением $C_1\bar{\Delta}(F;\, x,\, y,\, h,\, l)$ или $\Delta_r^*(F;\, x,\, y)$.

Рассмотрим теперь двойные тригонометрические ряды:

$$1)\ \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \lambda_{m,\, n} A_{m,\, n}(x,\, y), \quad 2)\ \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \lambda_{m,\, n} \frac{\partial}{\partial x} A_{m,\, n}(x,\, y),$$

$$3)\ \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \lambda_{m,\, n} \frac{\partial}{\partial y} A_{m,\, n}(x,\, y), \quad 4)\ \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \lambda_{m,\, n} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} A_{m,\, n}(x,\, y),$$

$$5)\ \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \lambda_{m,\, n} \Delta A_{m,\, n}(x,\, y),$$

где

$$\lambda_{m,\, n} = \begin{cases} {}^1/_4 \text{ при } m = n = 0, \\ {}^1/_2 \text{ при } m = 0,\, n > 0 \text{ или } n = 0,\, m > 0, \\ 1 \text{ при } m \geqslant 1,\, n \geqslant 1, \end{cases}$$

$$A_{m,\, n}(x,\, y) = a_{m,\, n} \cos mx \cos ny + b_{m,\, n} \sin mx \cos ny + \\ + c_{m,\, n} \cos mx \sin ny + d_{m,\, n} \sin mx \sin ny,$$

$$|a_{m,\, n}| \leqslant M, \quad |b_{m,\, n}| \leqslant M,\ |c_{m,\, n}| \leqslant M,\ |d_{m,\, n}| \leqslant M,\ M = \text{const}.$$

Ряд 1) называется $R(\alpha,\, \beta)$ $[R_\lambda(\alpha,\, \beta)]$-суммируемым ($\alpha$ и β — натуральные числа) к значению $S(x,\, y)$ в точке $(x,\, y)$, если

$$\lim_{u,\, v \to 0} R_{\alpha,\, \beta}(u,\, v,\, x,\, y) = S(x,\, y) \,[\lim_{(u,\, v)_\lambda \to 0} R_{\alpha,\, \beta}(u,\, v,\, x,\, y) = S(x,\, y)],$$

где

$$R_{\alpha,\, \beta}(u,\, v,\, x,\, y) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} \lambda_{m,\, n} A_{m,\, n}(x,\, y) \left(\frac{\sin mu}{mu}\right)^{\alpha} \left(\frac{\sin nv}{nv}\right)^{\beta}.$$

Исходя из ряда 1), составим ряд

$$\frac{a_{0,0}}{192}\left(x^4 + y^4\right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{m,\, 0}(x,\, y)}{m^4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{0,\, n}(x,\, y)}{n^4} + \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \frac{A_{m,\, n}(x,\, y)}{(m^2 + n^2)^2},$$

который абсолютно и равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $F(x,\, y)$.

Ряд 1) назовем (см. ([1]), стр. 289) R_2^*-суммируемым к значению $S(x,\, y)$ в точке $(x,\, y)$, если

$$\Delta^{*(2)} F(x,\, y) = S(x,\, y).$$

Теорема 4. *Пусть $f_i(x,\, y)$, $i = 1,\, 2,\, 3,\, 4$, — произвольные измеримые и почти всюду конечные функции на R. Тогда существует такая непрерывная функция $F(x,\, y)$, что если 1) является ее рядом Фурье, то почти всюду на R имеем:*

1. *Ряд 2) суммируем методом $R_\lambda(2,\, 1)$ к $f_1(x,\, y)$.*
2. *Ряд 3) суммируем методом $R_\lambda(1,\, 2)$ к $f_2(x,\, y)$.*
3. *Ряд 4) суммируем методом $R_\lambda(2,\, 2)$ к $f_3(x,\, y)$.*
4. *Ряд 5) суммируем методом R_2^* к $f_4(x,\, y)$.*

Теорема 5. *Ряд Фурье от любой суммируемой функции $f(x,\, y)$ суммируем методом R_2^* почти всюду на R к значению этой функции.*

Теорема 6. *Для всякой измеримой и почти всюду конечной на R функции $f(x,\, y)$ существует двойной тригонометрический ряд 1), суммируемый методом $R(2,\, 2)$ почти в каждой точке к значению функции $f(x,\, y)$.*

В доказательствах приведенных теорем применены различные варианты методов, использованных в работах Н. Н. Лузина (см. [2], стр. 78, 236), И. Марцинкевича [3], Н. К. Бари [4] и А. Г. Джваршейшвили [5].

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. А. Г. Джваршейшвили за внимание, проявленное к настоящей работе.

Грузинский политехнический институт
им. В. И. Ленина
Тбилиси

Поступило
13 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Rudin, Trans. Am. Math. Soc., **68**, 289 (1950). [2] Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951. [3] J. Marcinkiewicz, Fundam. Math., **24**, 305 (1935). [4] Н. К. Бари, Матем. сборн., **31** (73), 687 (1952). [5] А. Г. Джваршейшвили, Тр. Тбилисск. матем. инст. АН ГрузССР, **34**, 21 (1968).