

УДК 517.11.

МАТЕМАТИКА

В. И. ХОМИЧ

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМУЛ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 8 VI 1970)

В работе ⁽¹⁾ были получены результаты, показывающие, что наряду с пропозициональными формулами, не имеющими верхней оценки сложности реализуемости, имеются и такие формулы, для которых функция $\lambda x C_1 \cdot 14^x + C_2$ * при некоторых C_1 и C_2 является верхней оценкой сложности реализуемости. Возникает вопрос: верно ли, что любая пропозициональная формула или не имеет верхней оценки сложности реализуемости, или функция $\lambda x C_1 \cdot 14^x + C_2$ является ее верхней оценкой сложности реализуемости?

В настоящей работе будут приведены результаты, касающиеся только что поставленного вопроса: будет сформулировано условие, достаточное для того, чтобы пропозициональная формула не имела верхней оценки сложности реализуемости; будет дан утвердительный ответ на поставленный вопрос для случая, когда пропозициональная формула есть формула в одной переменной.

Мы будем пользоваться терминологией и понятиями, введенными в работах ⁽¹⁻⁶⁾, а также будем считать, что читатель знаком с работой ⁽²⁾.

1. В ⁽²⁾ понятия, касающиеся пропозициональных формул, вводятся для формул в одной переменной. Распространим их на любую пропозициональную формулу.

Пусть k — натуральное число, Q — k -членная система замкнутых логико-арифметических формул. Символом Q_i ($1 \leq i \leq k$) будем обозначать i -й член системы Q . Пусть n — натуральное число, G — пропозициональная формула в переменных $p_1, \dots, p_k$ **. Будем говорить, что нормальный алгоритм $\mathcal{A}$ над алфавитом A *** n -реализует формулу G , если для любой k -членной системы замкнутых логико-арифметических формул Q такой, что $[Q_i^0 \leq n$ ($1 \leq i \leq k$),

а) алгоритм $\mathcal{A}$ применим к Q ;

б) $\mathcal{A}(Q)$ реализует формулу $G(Q_1, \dots, Q_k)$.

Пусть G — пропозициональная формула. Будем говорить, что G не имеет верхней оценки сложности реализуемости, если для любой общерекурсивной функции f осуществимо такое натуральное число N , что для любого натурального числа m , такого что $m \geq N$, и любого нормального алгоритма $\mathcal{A}$ в алфавите A^+ , m -реализующего G , будет $\mathcal{A} \geq f(m)$.

* Здесь и в дальнейшем мы пользуемся λ -обозначениями (см. ⁽²⁾, стр. 37) для функций.

** Пропозициональная формула G есть формула в переменных $p_1, \dots, p_k$, если p_i ($1 \leq i \leq k$) входит в G и всякая пропозициональная переменная, отличная от $p_1, \dots, p_k$, не входит в G .

*** В настоящей работе, как и в ⁽¹⁾, A — алфавит логико-арифметических формул, а A^+ — стандартное двухбуквенное расширение алфавита A .

Заметим, что теорема 5 работы (*) остается верной и тогда, когда F и G — любые пропозициональные формулы, а не в одной переменной, как это требуется в работе (*).

2. Пусть J_1 — первая матрица Яськовского (см. (*), стр. 7).

Теорема 1. Если пропозициональная формула G опровержима на J_1 , то G не имеет верхней оценки сложности реализуемости.

Для доказательства этой теоремы используются теорема 4 работы (*), а также упомянутое выше усиление теоремы 5 работы (*) и фрагмент доказательства теоремы 1 работы (*) (если G опровержима на J_1 , то $G \vdash \neg \neg p \supset p$ в интуиционистском исчислении высказываний с правилом подстановки).

3. Пусть G — пропозициональная формула, f — общерекурсивная функция. Будем говорить, что f есть верхняя оценка сложности реализуемости формулы G , если для любого натурального числа n квазисуществим нормальный алгоритм $\mathcal{A}$ в алфавите A^+ такой, что $\mathcal{A}$ n -реализует G и $\mathcal{A} \leq f(n)$.

Теорема 2. Пусть $G_1, \dots, G_k$ и F — пропозициональные формулы, $f_1, \dots, f_k$ — общерекурсивные функции такие, что f_i есть верхняя оценка сложности реализуемости G_i ($1 \leq i \leq k$), и пусть формула $(G_1 \& \dots \& G_k) \supset F$ выводима в интуиционистском исчислении высказываний. Тогда существуют натуральные числа $C_0, C_1, \dots, C_k$ такие, что функция

$\lambda x \sum_{i=1}^k C_i \cdot f_i(x) + C_0$ является верхней оценкой сложности реализуемости F .

Будем говорить, что пропозициональная формула G имеет тривиальную верхнюю оценку сложности реализуемости, если для некоторых натуральных чисел C_1 и C_2 функция $\lambda x C_1 \cdot 14^x + C_2$ является верхней оценкой сложности реализуемости G .

Из теоремы 1 работы (*), теоремы 9 работы (*) и теорем 1 и 2 настоящей работы может быть получена следующая

Теорема 3. Любая пропозициональная формула G в одной переменной или не имеет верхней оценки сложности реализуемости, или имеет тривиальную верхнюю оценку сложности реализуемости.

Автор выражает глубокую признательность А. А. Маркову и Н. М. Нагорному за внимание к работе и ценные советы.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
4 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 42 (1954).
² С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957. ³ Н. А. Шанин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 43 (1955). ⁴ А. А. Марков, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, № 1, 161 (1967). ⁵ S. C. Kleene, J. Symbolic Logic, 10, 109 (1945).
⁶ G. F. Rose, Trans. Am. Math. Soc., 75, 1 (1953). ⁷ I. Nishimura, J. Symbolic Logic, 25, 327 (1960). ⁸ В. А. Янков, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 1, 208.
⁹ В. И. Хомич, ДАН, 191, № 5, 1004 (1970).