МАТЕМАТИКА

УДК 512.543

ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ТИТСА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП ТИПА (2,2,*N*,2,2,2)

В.В. Беняш-Кривец[1], **Я.А. Юшкевич**[2]

[1]*Белорусский государственный университет*, *Минск*
[2]*Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка*, *Минск*

ON THE TITS ALTERNATIVE FOR GENERALIZED TETRAEDRON GROUPS OF TYPE (2,2,*N*,2,2,2)

V.V. Beniash-Kryvets[1], **Y.A. Yushkevich**[1]

[1]*Belarusian State University*, *Minsk*
[2]*M. Tank Belarusian State Pedagogical University*, *Minsk*

Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление вида

$$\Gamma = \left\langle x_1, x_2, x_3 \middle| x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \right\rangle.$$

Существует гипотеза Розенбергера, что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. Эта гипотеза открыта для групп вида $\left\langle x_1, x_2, x_3 \middle| x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^2 = (x_1^{\alpha} x_3^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^2 = 1 \right\rangle$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{2}$.

В данной работе для групп $\Gamma = \left\langle a, b, c \middle| a^2 = b^n = c^2 = R(a,b)^2 = (b^{\alpha} c)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle$ найден ряд достаточных условий для выполнения альтернативы Титса.

Ключевые слова: *обобщенная тетраэдральная группа*, *альтернатива Титса*, *свободная группа*, *почти разрешимая группа.*

Generalized tetraedron groups have a presentation of the form

$$\Gamma = \left\langle x_1, x_2, x_3 \middle| x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \right\rangle.$$

There exists a Rosenberger's conjecture that the Tits alternative holds for generalized tetrahedron groups. This conjecture is open for groups of the form $\left\langle x_1, x_2, x_3 \middle| x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^2 = (x_1^{\alpha} x_3^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^2 = 1 \right\rangle$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{2}$. In this paper, a number of sufficient conditions are found for fulfillment the Tits alternative for groups

$$\Gamma = \left\langle a, b, c \middle| a^2 = b^n = c^2 = R(a,b)^2 = (b^{\alpha} c)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle.$$

Keywords: *generalized tetraedron group*, *Tits alternative*, *free group*, *almost solvavle group.*

1 Альтернативе Титса

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Винберг [1] ввел в рассмотрение обобщенные тетраэдральные группы, имеющие копредставление вида

$$\Gamma = \left\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \right\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2$, $R_{ij}(x_i, x_j)$ – циклически редуцированное слово в свободном произведении $\left\langle x_i \middle| x_i^{k_i} = 1 \right\rangle * \left\langle x_j \middle| x_j^{k_j} = 1 \right\rangle$, которое не является собственной степенью. Существует гипотеза [2], что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени в работах [2]–[6] эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп, кроме групп следующего вида:

$$\left\langle x_1, x_2, x_3 \middle| x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^2 = (x_1^{\alpha} x_3^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^2 = 1 \right\rangle, \quad (1.1)$$

где $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{2}$. Отметим также, что в [4] гипотеза Розенбергера доказана для групп вида (1.1) в следующих случаях:

1) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} < \frac{1}{2}$;

2) $\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < \frac{1}{2}$;

3) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} < \frac{1}{2}$, за исключением случая $k_3 = 2$ и $(k_1, k_2) = (3,8)$, $(3,10)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(4,8)$, $(5,6)$. Случаи, когда $(k_1, k_2) = (3,10), (4,5), (5,6)$, доказаны в [7]. В работах [8]–[10] гипотеза Розенбергера доказана для ряда классов групп в

© *Беняш-Кривец В.В.*, *Юшкевич Я.А.*, 2019

случае $(k_1, k_2) = (3,8), (4,6), (4,8)$.

В данной работе мы рассмотрим группы с копредставлением

$$\Gamma = \langle a, b, c \mid a^2 = b^n = c^2 = \\ = R(a,b)^2 = (b^\alpha c)^2 = (ac)^2 = 1 \rangle, \quad (1.2)$$

где $R(a,b) = ab^{u_1} ab^{u_2} \dots ab^{u_s}$, $1 \le u_i < n$. Учитывая результаты работы [6], мы можем считать, что $s > 2$.

2 Достаточные условия выполнения альтернативы Титса для групп (1.2)

Справедлива

***Теорема* 2.1**. *Пусть* Γ *– обобщенная тетраэдральная группа с копредставлением* (1.2) *и пусть* s *– четно. Тогда если* $n \ne 2,3,4,5,6,8,10,16$, *то для* Γ *справедлива альтернатива Титса.*

Далее мы будем обозначать через $[A]$ образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A. Конечно порожденная подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется неэлементарной, если она не содержит разрешимой подгруппы конечного индекса. Такая подгруппа всегда содержит неабелеву свободную подгруппу. В общем случае H элементарна тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1} = 2$ для любых двух элементов $[A], [B] \in H$ бесконечного порядка (см., например, [11]). Если $H = \langle [A], [B] \rangle$ – 2-порожденная подгруппа, то H является неэлементарной тогда и только тогда, когда она неприводима, отлична от группы диэдра (т. е. 2 из трех следов $\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} AB$ отличны от нуля) и бесконечна (т. е. отлична от групп A_4, S_4, A_5). Нетрудно показать, что произвольный элемент $[X] \in PSL_2(\mathbb{C})$ имеет порядок n тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} X = 2\cos\frac{\pi r}{n}$, где $(r,n) = 1$.

Пусть Γ – группа с копредставлением (1.2) и s четно. Рассмотрим гомоморфизм

$$f : \Gamma \to C_2 = \langle d \mid d^2 = 1 \rangle, a \mapsto d, b \mapsto 1, c \mapsto 1.$$

Пусть $G = \ker f$. Тогда G – подгруппа индекса 2 в Γ. Используя переписывающий процесс Райдемайстера-Шрайера, найдем копредставление G:

$$G = \langle d, e, h \mid d^n = e^n = h^2 = \\ = R_1(d,e)^2 = R_1(e,d)^2 = (d^\alpha h)^2 = (e^\alpha h)^2 = 1 \rangle, \quad (2.1)$$

где $R_1(d,e) = d^{u_1} e^{u_2} \dots d^{u_{s-1}} e^{u_s}$. Идея доказательства теоремы 2.1 состоит в том, чтобы построить представление $\rho : G \to PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. В этом случае группа G, а вместе с ней и Γ, будет содержать неабелеву свободную подгруппу.

Мы будем использовать стандартные факты и обозначения из теории характеров Фрике (см., например, [12]–[14]).

Рассмотрим свободную группу $F_k = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ с k образующими. Для произвольного элемента $w \in F_k$ определим функцию (характер Фрике) $\tau_w : SL_2(\mathbb{C})^k \to \mathbb{C}$, $\tau_w(A_1, \dots, A_k) = \operatorname{tr} w(A_1, \dots, A_k)$, где $\operatorname{tr} X$ обозначает след матрицы X. В [12] доказано, что если $w = g^{u_1} h^{v_1} \cdots g^{u_s} h^{v_s}$ – циклически редуцированное слово в свободной группе $F_2 = \langle g, h \rangle$ и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то $\tau_w = Q_w(x,y,z)$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x,y,z]$ – однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами, который называют многочленом Фрике элемента w. Следующие соотношения между характерами Фрике легко следуют из теоремы Гамильтона – Кэли: $\tau_{a^{-1}} = \tau_a$, $\tau_{ab} = \tau_a \tau_b - \tau_{ab^{-1}}$ для любых элементов $a, b \in F_k$.

Рассмотрим многочлены $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ для $n > 0$. Если $n < 0$, то положим $P_n(x) = -P_{|n|-2}(x)$. По индукции легко проверить, что

$$P_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Если $w = g^{u_1} h^{v_1} \cdots g^{u_s} h^{v_s} \in F_2$, $s \ge 1$, – циклически редуцированное слово и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то многочлен Q_w имеет вид

$$Q_w(x,y,z) = M_s(x,y) z^s + \dots + M_0(x,y), \quad (2.2)$$

где $M_s(x,y) = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i - 1}(x) P_{v_i - 1}(y)$ [13].

Отметим также следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - \\ - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB - 4 = 0. \quad (2.3)$$

***Лемма* 2.1.**

1) *Для любой тройки значений* $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{C}$ *существует пара матриц* $A_0, B_0 \in SL_2(\mathbb{C})$ *таких, что* $\operatorname{tr} A_0 = x_0$, $\operatorname{tr} B_0 = y_0$, $\operatorname{tr} A_0 B_0 = z_0$.

2) *Для произвольных чисел* $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C}$, *существуют матрицы* $A_1, A_2, A_3 \in SL_2(\mathbb{C})$ *такие, что* $\operatorname{tr} A_i = a_i$, $\operatorname{tr} A_i A_j = a_{ij}$ *для всех* i, j.

Эту лемму нетрудно доказать непосредственным вычислением.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть G – группа с копредставлением (2.1). Положим

$\tau_d = \tau_e = 2\cos\frac{\pi}{n}$ $\tau_h = \tau_{dh} = \tau_{eh} = 0$ и обозначим $\tau_{de} = z$. Тогда нетрудно вычислить, что

$$\tau_{d^\alpha h} = P_{\alpha-1}(\tau_d)\tau_{dh} = 0,\ \tau_{e^\alpha h} = P_{\alpha-1}(\tau_e)\tau_{eh} = 0.$$

Далее,

$$\tau_{R_1(d,e)} = Q_{R_1(d,e)}(\tau_d, \tau_e, \tau_{de}) =$$
$$= Q_{R_1(d,e)}\left(2\cos\frac{\pi}{n}, 2\cos\frac{\pi}{n}, z\right),$$
$$\tau_{R_1(e,d)} = Q_{R_1(e,d)}(\tau_e, \tau_d, \tau_{ed}) =$$
$$= Q_{R_1(e,d)}\left(2\cos\frac{\pi}{n}, 2\cos\frac{\pi}{n}, z\right).$$

Следовательно,

$$\tau_{R_1(d,e)} = \tau_{R_1(e,d)} = g(z) \qquad (2.4)$$

для некоторого многочлена $g(z) \in \mathbb{C}[x]$ степени $\frac{s}{2} \geq 2$.

***Лемма* 2.2.** *Каждому корню z_0 многочлена $g(z) = \tau_{R_1(d,e)}$ соответствует некоторое представление $\rho_{z_0} : G \to PSL_2(\mathbb{C})$. Группу $\rho_{z_0}(G)$ будем обозначать $G(z_0)$.*

Доказательство. Если z_0 – корень $g(z)$, то по лемме 2.1 существуют матрицы $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 2\cos\frac{\pi}{n}$, $\operatorname{tr} C = 0$, $\operatorname{tr} AB = z_0$, $\operatorname{tr} AC = 0$, $\operatorname{tr} BC = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{tr} R_1(A,B) = \operatorname{tr} R_1(B,A) = \operatorname{tr} A^\alpha C = \operatorname{tr} B^\alpha C = 0.$$

Тогда выполняются соотношения

$$[A]^n = [B]^n = [C]^2 =$$
$$= R_1^2([A],[B]) = R_1^2([B],[A]) =$$
$$= ([A]^\alpha[C])^2 = ([B]^\alpha[C])^2 = 1$$

и отображение $d \to [A]$, $e \to [B]$, $f \mapsto [C]$ задает представление группы G. □

***Лемма* 2.3.** *Если многочлен $g(z)$ имеет корень z_0, отличный от 2 и $2\cos\frac{2\pi}{n}$, то группа $G(z_0)$, а вместе с ней и группа G, содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Пусть z_0 – некоторый корень полинома $g(z)$. Обозначим через K подгруппу в $G(z_0)$, порожденную $[A]$, $[B]$. Если z_0 отличен от 2 и $2\cos\frac{2\pi}{n}$, то z_0 не является корнем уравнения

$$z^2 - 4\cos^2\frac{\pi}{n}z + 8\cos^2\frac{\pi}{n} - 4 = 0,$$

поэтому из (2.3) следует, что группа K неприводима. Так как элементы $[A], [B]$ имеют по условию теоремы 2.1 порядок $n \geq 7$, то группа K отлична от группы диэдра и, следовательно, бесконечна, поскольку в группах A_4, S_4, A_5 нет элементов порядка $n \geq 6$. Значит, K – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ и, следовательно, K, а вместе с ней и $G(z_0)$, содержит неабелеву свободную подгруппу. □

Для слова $R_1(d,e) = d^{u_1}e^{u_2}\ldots d^{u_{s-1}}e^{u_s}$ обозначим через

$$U = u_1 + u_3 + \ldots + u_{s-1},\ V = u_2 + u_4 + \ldots + u_s.$$

***Лемма* 2.4.** *Если $2\cos\frac{U+V}{n}\pi \neq 0$, то многочлен $g(z)$ не имеет корня $2\cos\frac{2\pi}{n}$, а если $2\cos\frac{U-V}{n}\pi \neq 0$, то многочлен $g(z)$ не имеет корня 2.*

Доказательство. Допустим, что

$$2\cos\frac{U+V}{n}\pi \neq 0,$$

а $g(z)$ имеет корень $2\cos\frac{2\pi}{n}$. Тогда

$$g(z) = \left(z - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right)g_1(z).$$

Положим

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ t & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ и t – переменная. Тогда $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 2\cos\frac{\pi}{n}$, $\operatorname{tr} AB = t + 2\cos\frac{2\pi}{n}$ и мы имеем

$$\tau_{R_1(d,e)}(A,B) = \operatorname{tr} R_1(A,B) =$$
$$= g\left(t + 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) = \operatorname{tg}_1\left(t + 2\cos\frac{2\pi}{n}\right).$$

Таким образом, $\tau_{R_1(d,e)}(A,B)$ является многочленом от t, свободный коэффициент которого равен нулю. С другой стороны, вычисляя след матрицы $R_1(A,B) = A^{u_1}B^{u_2}\ldots A^{u_{s-1}}B^{u_s}$ легко видеть, что он является многочленом от t, свободный коэффициент которого равен

$$\varepsilon^{U+V} + \varepsilon^{-U-V} = 2\cos\frac{U+V}{n}\pi \neq 0$$

– противоречие. Вторая часть леммы доказывается аналогично, только вместо матрицы B рассматривается матрица $B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ t & \varepsilon \end{pmatrix}$. □

Из леммы 2.4 следует

***Лемма* 2.5.** *Если $n \geq 7$ нечетно, то многочлен $g(z)$ имеет корень z_0, отличный от 2 и*

$2\cos\frac{2\pi}{n}$, *и по лемме* 2.3 *группа G содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Действительно, в этом случае

$$2\cos\frac{U\pm V}{n}\pi\neq 0,$$

поэтому по лемме 2.4 многочлен $g(z)$ не имеет корней 2 и $2\cos\frac{2\pi}{n}$ и, следовательно, имеет корень z_0, отличный от этих чисел.

***Лемма* 2.6.** Если $n=2^k n_1$, *где* $k\geq 1$ *и* $n_1\geq 7$ – *нечетно, то группа G содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Если $2\cos\frac{U+V}{n}\pi\neq 0$ и $2\cos\frac{U-V}{n}\pi\neq 0$, то по леммам 2.3 и 2.4 G содержит неабелеву свободную подгруппу. Поэтому будем считать, что хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Пусть, например,

$$2\cos\frac{U+V}{n}\pi=0.$$

Тогда n_1 делит $U+V$. Рассмотрим факторгруппу группы G:

$$G_1=\Big\langle d_1,e_1,h_1\mid d_1^{n_1}=e_1^{n_1}=h_1^2=$$

$$=R_1'(d_1,e_1)^2=R_1'(e_1,d_1)^2=(d_1^{\alpha}h_1)^2=(e_1^{\alpha}h_1)^2=1\Big\rangle,$$

где $R_1'(d_1,e_1)$ – циклически редуцированное слово в свободном произведении

$$\langle d_1\mid d_1^{n_1}=1\rangle*\langle e_1\mid e_1^{n_1}=1\rangle,$$

сопряженное с $R_1(d_1,e_1)$. Слово $R_1'(d_1,e_1)$ может иметь одну из трех форм:

1) $R_1'(d_1,e_1)=d_1^{U_1}$, где $U_1\equiv U(\operatorname{mod} n_1)$;

2) $R_1'(d_1,e_1)=e_1^{V_1}$, где $V_1\equiv V(\operatorname{mod} n_1)$;

3) $R_1'(d_1,e_1)=d_1^{\beta_1}e_1^{\gamma_1}\ldots d_k^{\beta_k}e_k^{\gamma_k}$, где $k\geq 1$, $1\leq\beta_i$, $\gamma_i<n_1$.

Рассмотрим случай 1). Чтобы слово $R_1'(d_1,e_1)$ приняло такой вид, необходимо, чтобы n_1 делило V, а тогда n_1 делит U, а значит и U_1. Поэтому $R_1'(d_1,e_1)=1$ и группа G_1 имеет копредставление $G_1=\Big\langle d_1,e_1,h_1\Big|d_1^{n_1}=e_1^{n_1}=h_1^2=(d_1^{\alpha}h_1)^2=(e_1^{\alpha}h_1)^2=1\Big\rangle$. Легко построить представление группы G_1 в $PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. Для этого рассмотрим матрицы $A,B,C\in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B=2\cos\frac{\pi}{n_1}$, $\operatorname{tr}C=0$, $\operatorname{tr}AB=z_0$, $\operatorname{tr}AC=0$, $\operatorname{tr}BC=0$, где z_0 произвольное число, отличное от 2 и $2\cos\frac{2\pi}{n_1}$. Отображение

$$d_1\mapsto[A],\ e_1\mapsto[B],\ h_1\mapsto[C]$$

является искомым представлением. Следовательно, G_1, а поэтому и G содержит неабелеву свободную подгруппу

Случай 2) рассматривается аналогично.

В случае 3) по лемме 2.5 группа G_1, а, следовательно, и G содержит неабелеву свободную подгруппу. □

***Лемма* 2.7.** *Если* $n=2^k n_1$, *где* $k\geq 2$ *и* $n_1=3$ *или* $n_1=5$, *то группа G содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2.6 достаточно рассмотреть случай, когда хотя бы одно из чисел $2\cos\frac{U\pm V}{n}\pi$ равно нулю. Пусть $2\cos\frac{U+V}{n}\pi=0$. Тогда $U+V=2^{k-1}n_1(2h+1)$ для некоторого $h\in\mathbb{Z}$. Следовательно, число $U-V=(U+V)-2V$ является четным и $2\cos\frac{U-V}{2n_1}\pi\neq 0$. При этом $2\cos\frac{U+V}{2n_1}\pi\neq 0$. Рассмотрим факторгруппу группы G:

$$G_2=\Big\langle d_1,e_1,h_1\mid d_1^{2n_1}=e_1^{2n_1}=h_1^2=$$

$$=R_1'(d_1,e_1)^2=R_1'(e_1,d_1)^2=(d_1^{\alpha}h_1)^2=(e_1^{\alpha}h_1)^2=1\Big\rangle,$$

где $R_1'(d_1,e_1)$ – циклически редуцированное слово в свободном произведении

$$\langle d_1\mid d_1^{2n_1}=1\rangle*\langle e_1\mid e_1^{2n_1}=1\rangle,$$

сопряженное с $R_1(d_1,e_1)$. Дальнейшее доказательство полностью аналогично доказательству леммы 2.6.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 2.1.

***Лемма* 2.8.** *Если* $n=2^k$, *где* $k\geq 5$, *то группа G содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Снова достаточно рассмотреть случай, когда хотя бы одно из чисел $2\cos\frac{U\pm V}{2^k}\pi$ равно нулю. Пусть $2\cos\frac{U+V}{2^k}\pi=0$. Тогда $U+V=2^{k-1}(2h+1)$ для некоторого $h\in\mathbb{Z}$. Если 2^{k-2} делит $U-V$, то $2\cos\frac{U\pm V}{2^{k-2}}\pi\neq 0$ и мы рассматриваем факторгруппу группы G:

$$G_3=\Big\langle d_1,e_1,h_1\mid d_1^{2^{k-2}}=e_1^{2^{k-2}}=h_1^2=$$

$$R_1'(d_1,e_1)^2=R_1'(e_1,d_1)^2=(d_1^{\alpha}h_1)^2=(e_1^{\alpha}h_1)^2=1\Big\rangle.$$

Если же 2^{k-2} не делит $U-V$, то

$$2\cos\frac{U\pm V}{2^{k-1}}\pi\neq 0$$

и мы рассматриваем факторгруппу группы G:

$$G_4=\Big\langle d_1,e_1,h_1\mid d_1^{2^{k-1}}=e_1^{2^{k-1}}=h_1^2=$$

$$=R_1'(d_1,e_1)^2=R_1'(e_1,d_1)^2=(d_1^{\alpha}h_1)^2=(e_1^{\alpha}h_1)^2=1\Big\rangle.$$

Теперь, аналогично доказательству леммы 2.6, мы доказываем, что группы G_3 и G_4 содержат неабелеву свободную подгруппу. □

***Теорема* 2.2.** *Пусть*

$$\Gamma=\Big\langle a,b,c\mid a^2=b^n=c^2=$$

$$=R(a,b)^2=(b^{\alpha}c)^2=(ac)^2=1\Big\rangle$$

– обобщенная тетраэдральная группа, где $R(a,b)=$ $=ab^{u_1}ab^{u_2}\ldots ab^{u_s}$, $1\le u_i<n$, $U=u_1+\ldots+u_s$, $s>1$ *– нечетно и* $n=p^kn_1$ *для некоторого простого p такого, что* $(n_1,p)=1$, *при этом* $k\ge 3$ *при* $p=2$, $k\ge 2$ *при* $p=3,5$, $k\ge 1$ *при* $p\ge 7$ (*т. е.* $n\neq 2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,30,60$). *Если выполняется одно из условий*:

1) $(\alpha,n)\ge 3$;

2) $(U,n)=1$,

то Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Доказательство. Рассмотрим эпиморфизм g группы Γ на циклическую группу $C_2=\langle d\rangle$ порядка 2, $g(a)=g(b)=1$, $g(c)=d$. Тогда ядро $H=\ker g$ имеет копредставление

$$\Big\langle d,e,f\mid d^2=e^n=f^n=$$

$$=R^2(d,e)=R^2(d,f)=e^{\alpha}f^{\alpha}=1\Big\rangle.$$

Рассмотрим случай, когда $(\alpha,n)=h\ge 3$. Рассмотрим факторгруппу H_1 группы H с копредставлением

$$H_1=\Big\langle d,e,f\mid d^2=e^h=f^h=$$

$$=R^2(d,e)=R^2(d,f)=e^{\alpha}f^{\alpha}=1\Big\rangle$$

(чтобы не усложнять обозначения, мы сохранили обозначения d,e,h для образующих). В группе H_1 мы имеем $e^{\alpha}=f^{\alpha}=1$. Слово $R(d,e)$ в свободном произведении $\langle d\mid d^2=1\rangle*\langle e\mid e^h=1\rangle$ сопряжено с циклически редуцированным словом вида либо $R_1=d$, либо $R_2=de^{a_1}\ldots de^{a_m}$, где $m>1$ и $1\le a_i<h$ для всех i. В первом случае группа H_1 имеет копредставление

$$H_1=\langle d,e,f\mid d^2=e^h=f^h=1\rangle,$$

т. е. является свободным произведением трех циклических групп порядков $2,h$ и h соответственно, а поэтому содержит неабелеву свободную подгруппу. Во втором случае группа H_1 имеет копредставление

$$H_1=\langle d,e,f\mid d^2=e^h=f^h=$$

$$=R_1^2(d,e)=R_2^2(d,f)=1\rangle.$$

Придадим следующие значения характерам Фрике: $\tau_d=0$, $\tau_e=\tau_f=2cos\frac{\pi}{h}$. Положим $z_1=\tau_{de}$, $z_2=\tau_{df}$, $z_3=\tau_{ef}$. Рассмотрим многочлен

$$g(z_1)=\tau_{R_1(d,e)}\left(0,2\cos\frac{\pi}{h},z_1\right).$$

Многочлен $g(z_1)$ имеет степень m и пусть z_0 какой-либо его корень. По лемме 2.1 существуют матрицы $A_1,A_2,A_3\in SL_2(\mathbb{C})$, такие, что $\operatorname{tr}A_1=0$, $\operatorname{tr}A_2=\operatorname{tr}A_3=2\cos\frac{\pi}{h}$, $\operatorname{tr}A_1A_2=\operatorname{tr}A_1A_3=z_0$, $\operatorname{tr}A_2A_3=3$. Тогда отображение $d\mapsto[A_1]$, $e\mapsto[A_2]$, $f\mapsto[A_3]$ задает представление группы H_1 в $PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом, поскольку подгруппа $\langle[A_2],[A_3]\rangle$ неприводима, бесконечна и отлична от группы диэдра. Следовательно, группа H_1, а поэтому и группы H и Γ содержат неабелеву свободную подгруппу, что доказывает пункт 1) теоремы 2.2.

Рассмотрим факторгруппу H_2 группы H, добавив соотношение $e=f^{-1}$. Группа H_2 имеет копредставление

$$H_2=\langle d,e\mid d^2=e^n=R^2(d,e)=R^2(d,e^{-1})=1\rangle.$$

Докажем, что при выполнении условий 2) либо 3) теоремы 2.2 группа H_2 содержит неабелеву свободную подгруппу. Идея доказательства состоит в том, чтобы построить представление группы H_2 в $PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом.

Рассмотрим сначала случай, когда $(U,n)=1$. Запишем n в виде $n=p^kn_1$ как в условии теоремы. Пусть r, $1\le r<n$, – некоторое число, такое, что $(r,p)=1$. Положим $\tau_d=0$, $\tau_e=2\cos\frac{r\pi}{n}$, $\tau_{de}=z$ и определим многочлен

$$g_r(z)=\tau_{R(d,e)}\left(0,2\cos\frac{r\pi}{n},z\right).$$

Отметим, что поскольку $d=d^{-1}$ в группе H_2, то

$$\tau_{R(d,e^{-1})}=\tau_{R(d^{-1},e^{-1})}=$$

$$=Q_R(\tau_{d^{-1}},\tau_{e^{-1}},\tau_{d^{-1}e^{-1}})=Q_R(\tau_d,\tau_e,\tau_{de})=\tau_{R(d,e)},$$

где Q_R – полином Фрике слова R. Следовательно,

$$\tau_{R(d,e^{-1})}\left(0,2\cos\frac{r\pi}{n},z\right)=$$

$$=\tau_{R(d,e)}\left(0,2\cos\frac{r\pi}{n},z\right)=g_r(z).$$

Если z_0 – корень многочлена $g_r(z)$, то по лемме 2.1 найдутся матрицы $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\operatorname{tr} A = 0,\ \operatorname{tr} B = 2\cos\frac{r\pi}{n},\ \operatorname{tr} AB = z_0$$

и отображение $d \mapsto [A], e \mapsto [B]$ задает представление группы H_2 в $PSL_2(\mathbb{C})$. Обозначим $G(z_0) = \langle [A],[B] \rangle$.

***Лемма* 2.9.** *Группа $G(z_0)$ является неэлементарной подгруппой в $PSL_2(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда z_0 не принадлежит множеству* $\left\{0, \pm 2\sin\frac{r\pi}{n}\right\}$.

Доказательство. Если $z_0 = 0$, то группа $G(z_0)$ – конечная группа диэдра. Если $z_0 = \pm 2\sin\frac{r\pi}{n}$, то группа $G(z_0)$ приводима, поскольку выполняется равенство (2.3). Если же z_0 не принадлежит указанному в лемме множеству, то группа $G(z_0)$ неприводима, отлична от группы диэдра и бесконечна, поскольку элемент $[B]$ имеет порядок больше 5. Поэтому $G(z_0)$ неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$. □

***Лемма* 2.10.** *Многочлен $g_r(z)$ не имеет корней* $\pm 2\sin\frac{r\pi}{n}$.

Доказательство. Допустим, что $z_0 = 2\sin\frac{r\pi}{n}$ – корень $g_r(z)$. Тогда $g_r(z) = \left(z - 2\sin\frac{r\pi}{n}\right)h(z)$ для некоторого многочлена *h*. Положим

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon^n & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-n} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-2r} & 0 \\ t & \varepsilon^{2r} \end{pmatrix}, \qquad (2.5)$$

где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi}{2n}$. Тогда

$$\operatorname{tr} A = 0,\ \ \operatorname{tr} B = 2\cos\frac{r\pi}{n},$$

$$\operatorname{tr} AB = t + 2\cos\frac{(-2r+n)\pi}{2n} = t + 2\sin\frac{r\pi}{n}$$

и мы имеем равенство

$$\operatorname{tr} R(A,B) = g_r\left(\operatorname{tr} AB\right) = \operatorname{th}\left(t + 2\sin\frac{r\pi}{n}\right). \quad (2.6)$$

Таким образом, свободный член многочлена в правой части (2.6) равен нулю. С другой стороны, свободный член полинома $\operatorname{tr} R(A,B)$ равен

$$2\cos\frac{sn - 2rU}{2n}\pi =$$

$$= 2\cos\left(\frac{s}{2} - \frac{rU}{n}\right)\pi = \pm 2\sin\frac{rU\pi}{n} \neq 0$$

в силу выбора числа *r* и того, что s – нечетное, $(U,n) = 1$ – противоречие.

Аналогично, рассматривая вместо матрицы $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-2r} & 0 \\ t & \varepsilon^{2r} \end{pmatrix}$ матрицу $B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{2r} & 0 \\ t & \varepsilon^{-2r} \end{pmatrix}$, получим что $z_0 = -2\sin\frac{r\pi}{n}$ не является корнем $g_r(z)$. □

Из лемм 2.9 и 2.10 получаем

Следствие. *Если многочлен $g_r(z)$ имеет корень z_0, отличный от нуля, то группа $G(z_0)$, а вместе с ней и группа H_2, содержит неабелеву свободную подгруппу.*

***Лемма* 2.11** [14]. *Пусть* ε *– примитивный корень из* 1 *степени n*,

$$L_n = \mathbb{Q}(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) = \mathbb{Q}\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right),$$

p – простое число. Тогда:

1. *Если* $(r,p) = 1$, *то*

$$N_{L_{4p^s}/\mathbb{Q}}\left(2\sin\frac{r\pi}{p^s}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2}}p, & p > 2 \\ 2, & p = 2. \end{cases}$$

2. *Если* $n > 2$, *n не является степенью простого числа и* $(r,n) = 1$, *то* $N_{L_n/\mathbb{Q}}\left(2\sin\frac{r\pi}{n}\right) = 1$.

***Лемма* 2.12.** *Многочлен $g_r(z)$ при подходящем выборе r имеет корень* $z_0 \neq 0$.

Доказательство. Пусть *A* и *B* – матрицы, определенные в (2.5). Допустим, что

$$g_r(z) = M_s \cdot z^s,$$

где (см. [13])

$$M_s = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i - 1}\left(2\cos\frac{r\pi}{n}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)^{-s} \prod_{i=1}^{s} 2\sin\left(\frac{u_i r\pi}{n}\right).$$

Тогда $\operatorname{tr} R(A,B) = g_r\left(\operatorname{tr} AB\right) = M_s\left(t + 2\sin\frac{r\pi}{n}\right)^s$.

Поэтому свободный член полинома $\operatorname{tr} R(A,B)$ равен

$$M_s\left(2\sin\frac{r\pi}{n}\right)^s = \prod_{i=1}^{s} 2\sin\left(\frac{u_i r\pi}{n}\right) \qquad (2.7)$$

С другой стороны, свободный член $\operatorname{tr} R(A,B)$ равен

$$2\cos\frac{sn - 2rU}{2n}\pi = (-1)^{(s-1)/2} 2\sin\frac{rU\pi}{n}.$$

Таким образом, имеем равенство:

$$\prod_{i=1}^{s} 2\sin\left(\frac{u_i r\pi}{n}\right) = (-1)^{(s-1)/2} 2\sin\frac{rU\pi}{n}. \quad (2.8)$$

Предположим вначале, что p^k не делит u_i (напомним, что $n = p^k n_1$ как в условии теоремы)

для всех i. Положим $r = n_1$. Тогда (2.8) примет вид:

$$\prod_{i=1}^{s} 2\sin\left(\frac{u_i\pi}{p^k}\right) = (-1)^{(s-1)/2} 2\sin\frac{U\pi}{p^k}. \qquad (2.9)$$

Учитывая лемму 2.11 и то, что $s > 1$, получим, что норма левой части делится на p^s, а норма правой равна $\pm p$ – противоречие.

Далее, пусть существуют такие значения $i \in \{1,...,s\}$, что p^k делит u_i.

Для всех таких i запишем: $\frac{u_i}{p^k n_1} = \frac{v_i}{m_i}$, где $(v_i, m_i) = 1$ и p не делит m_i. Пусть $m_j = p_1 p_2 ... p_t$ – разложение на простые множители наименьшего из всех таких m_i. Тогда положим $r = p_2 ... p_t$, если $t > 1$, и $r = 1$ при $t = 1$. Тогда левая часть (2.8) содержит множитель

$$2\sin\left(\frac{v_j p_2 ... p_t \pi}{p_1 p_2 ... p_t}\right) = 2\sin\left(\frac{v_j \pi}{p_1}\right),$$

норма которого по лемме 2.11 имеет вид $\pm p_1^m$ для некоторого m. С другой стороны, правая часть (2.8) примет вид $(-1)^{(s-1)/2} 2\sin\left(\frac{U}{p^k p_1 q}\right)\pi$, где $(U, p^k p_1 q) = 1$ и $p \neq p_1$ – различные простые числа. Таким образом, норма правой части равна ± 1. Следовательно, нормы левой и правой части (2.8) не совпадают – противоречие. Теорема 2.2 доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Винберг*, *Э.Б.* Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями / Э.Б. Винберг // Математический сборник. – 1997. – Т. 188, № 9. – С. 3–12.

2. *Fine*, *B.* Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products / B. Fine, G. Rosenberger – New York: Marcel Dekker. – 315 p.

3. *Howie*, *J.* The Tits alternative for generalized tetrahedron groups / J. Howie, N. Kopteva // Journal of Group Theory. – 2006. – Vol. 9. – P. 173–189.

4. *Fine*, *B.* The Tits alternative for spherical generalized tetrahedron groups / B. Fine, A. Hulpke, V. große Rebel, G. Rosenberger // Algebra Colloquium. – 2008. – Vol. 15, № 4. – P. 541–554.

5. *Große Rebel*, *V.* The Tits alternative for Tsaranov's generalized tetrahedron groups / V. große Rebel, M. Hahn, G. Rosenberger // Groups-Complexity-Cryptology. – 2009. – Vol. 1, № 2. – P. 207–216.

6. *Fine*, *B.* The Tits alternative for short generalized tetrahedron groups / B. Fine, A. Hulpke, V. große Rebel, G. Rosenberger, S. Schauerte // Scientia. Series A: Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 21. – P. 1–15.

7. *Беняш-Кривец*, *В.В.* О свободных подгруппах в некоторых обобщенных тетраэдральных группах / В.В. Беняш-Кривец, С. Хуа // Вестник Белорусского государственного университета, сер. 1. – 2008. – № 2. – С. 79–85.

8. *Беняш-Кривец*, *В.В.* Альтернатива Титса для обобщенных тетраэдральных групп специального типа / В.В. Беняш-Кривец, Я. А. Жуковец // Вестник Белорусского государственного университета, сер. 1. – 2011. – № 1. – С. 46–53.

9. *Беняш-Кривец*, *В.В.* О свободных подгруппах в обобщенных тетраэдральных группах типа (3,8,2,2,2,2) / В.В. Беняш-Кривец, Я.А. Жуковец // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2011. – № 6 (66). – С. 12–15.

10. *Беняш-Кривец*, *В.В.* О свободных подгруппах в обобщенных тетраэдральных группах типа (4,6,2,2,2,2) / В.В. Беняш-Кривец, Я.А. Жуковец // Вестник Белорусского государственного университета, сер. 1. – 2012. – № 1. – С. 62–68.

11. *Katok*, *S.* Fuchsian groups / S. Katok. – University of Chicago Press: Chicago, IL. – 1992. – 175 p.

12. *Horowitz*, *R.* Characters of free groups represented in the two-dimensional special linear group / R. Horowitz // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1972. – Vol. 25. – P. 635–649.

13. *Traina*, *C.* Trace polynomial for two generator subgroups of $SL(2,\mathbb{C})$ / C. Traina // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1980. – Vol. 79. – P. 369–372.

14. *Беняш-Кривец*, *В.В.* О свободных подгруппах некоторых обобщенных треугольных групп / В.В. Беняш-Кривец // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 3. – С. 14–17.

Поступила в редакцию 11.03.19.