МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЕКТОРОВ С ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева[1,2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

ON THE INTERSECTIONS OF GENERALIZED PROJECTORS WITH THE PRODUCTS OF NORMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

T.I. Vasilyeva[1,2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Исследованы факторизационные свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора, введенного В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной в 2016 году (ω – непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп). Найдены необходимые и достаточные условия выполнения равенства $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ для любого $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора H и любых нормальных ω-подгрупп N_1 и N_2 группы G, где G – расширение ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы.

Ключевые слова: *конечная группа, $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор, ω-насыщенная формация, ω-примитивно замкнутый гомоморф.*

The factorization properties of the $\mathfrak{F}^{\omega}$-projector introduced by V.A. Vedernikov and M.M. Sorokina in 2016 (ω is a non-empty set of primes and $\mathfrak{F}$ is a non-empty class of groups) were investigated. Necessary and sufficient conditions are found for the equality $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ for any $\mathfrak{F}^{\omega}$-projector H and any normal ω-subgroups N_1 and N_2 of G, where G is an extension of the ω-group with the help of an $\mathfrak{F}$-group.

Keywords: *finite group*, $\mathfrak{F}^{\omega}$-*projector*, ω-*saturated formation*, ω-*primitive closed homomorph*.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечные. В разрешимой группе холловы (в частности, силовские) подгруппы, картеровы подгруппы, т.е. самонормализуемые нильпотентные подгруппы, обладают таким важным свойством, как сохранение при гомоморфизмах группы «максимальности» относительно заданного класса групп. Это было замечено Гашюцем [1], [2] и легло в основу следующего понятия.

Для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*проектором* в G, если HN / N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G / N для любой нормальной подгруппы N из G.

Для класса $\mathfrak{S}_p$ всех p-групп множества силовских p-подгрупп и $\mathfrak{S}_p$-проекторов совпадают в любой группе. Если $\mathfrak{F}$ есть класс всех разрешимых π-групп $\mathfrak{S}_\pi$ или класс всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$, а группа G разрешима, то совпадают множества ее π-холловых подгрупп и $\mathfrak{S}_\pi$-проекторов, множества картеровых подгрупп и $\mathfrak{N}$-проекторов [3, теорема 15.2]. Гашюц [1] доказал, что для существования $\mathfrak{F}$-проекторов в любой разрешимой группе достаточно насыщенности формации $\mathfrak{F}$. Шунк [4] установил, что в каждой разрешимой группе $\mathfrak{F}$-проекторы существуют тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – примитивно замкнутый гомоморф (названных позднее классом Шунка). Эриксон [5] распространил результат Шунка на произвольные группы.

В [6] В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной было введено одно обобщение понятия $\mathfrak{F}$-проектора, для которого были изучены такие свойства, как существование, сопряженность, вложение подгрупп, инвариантность относительно заданных гомоморфизмов.

***Определение* 0.1** [6]. Пусть ω – непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в G, если HN / N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G / N для любой нормальной ω-подгруппы N из G.

Отметим одно важное свойство $\mathfrak{F}$-проекторов. В классе разрешимых групп Хупперт [7], Ти Ен [8, теорема IV.5.3] доказали, что если $\mathfrak{F}$ – класс Шунка, то

$$N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)\,(N_2 \cap H)$$

для любого $\mathfrak{F}$-проектора H и любых нормальных подгрупп N_1 и N_2 группы G тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. В классе всех групп этот результат доказал Фёрстер [9].

Настоящая работа посвящена нахождению новых свойств $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов. В частности, здесь исследуются пересечения $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов с произведениями нормальных ω-подгрупп групп и развиваются результаты Хупперта-Ти Ена, Фёрстера в случае, когда $\mathfrak{F}$ – ω-примитивно замкнутый гомоморф или ω-насыщенная формация.

1 Предварительные результаты

Используются стандартные определения и обозначения, при необходимости см. [8], [10].

Для группы G через $|G|$ обозначается ее порядок, через $\pi(G)$ – множество всех простых делителей $|G|$, через $\mathrm{Core}_G(M)$ – ядро подгруппы M в G, т.е. $\mathrm{Core}_G(M) = \cap M^x$ для всех $x \in G$, $O_\omega(G)$ – наибольшая нормальная ω-подгруппа из G, где ω – некоторое подмножество множества $\mathbf{P}$ всех простых чисел.

Группа G называется ω-*примитивной* [6], если в G существует максимальная подгруппа M такая, что $\mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, а M называется ω-*примитиватором*. Нам потребуется следующий результат, вытекающий из [6, теорема 2.1].

***Лемма* 1.1.** *Пусть G – ω-примитивная группа, M – ее ω-примитиватор и $O_\omega(G) \neq 1$. Тогда G содержит не более двух минимальных нормальных ω-подгрупп, при этом, если в G имеется только две минимальные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2, то $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong$ $\cong N_1N_2 \cap M$ и $C_G(N_i) = N_{3-i} \times \mathrm{Core}_G(M)$, $i = 1, 2$.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется: 1) *наследственным*, если $\mathfrak{F}$ содержит вместе с каждой группой и все ее подгруппы; 2) *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G / N \in \mathfrak{F}$ для любой нормальной подгруппы N из G; 3) *формацией*, если $\mathfrak{F}$ – гомоморф, и из $G / A \in \mathfrak{F}$ и $G / B \in \mathfrak{F}$ для любых нормальных подгрупп A и B из G всегда следует, что $G / A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{F}$. Группа (подгруппа), принадлежащая $\mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{F}$-*группой* ($\mathfrak{F}$-*подгруппой*); $\mathfrak{F}$-подгруппа называется $\mathfrak{F}$-*максимальной* в группе, если она не содержится ни в одной собственной $\mathfrak{F}$-группе группы. Если $\mathfrak{F}$ – формация, то $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная в G подгруппа, для которой $G / G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Зафиксируем следующие обозначения: $\mathfrak{E}$ – класс всех групп, $\mathfrak{E}_\omega$ – класс всех ω-групп, $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп.

Класс групп $\mathfrak{E}_\omega\mathfrak{F} = (G \mid$ в G существует нормальная ω-подгруппа N такая, что $G / N \in \mathfrak{F})$. Если группа $G \in \mathfrak{E}_\omega\mathfrak{F}$, то G называется *расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы*.

Приведем некоторые, наиболее часто встречающиеся свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов [6, леммы 3.1 и 3.2].

***Лемма* 1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп, N – нормальная ω-подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G, то HN / N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G/N.*

(2) *Если $\mathfrak{F}$ – непустой гомоморф, H / N – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G / N* и *K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы H, то K – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G.*

Непустой класс групп $\mathfrak{F}$, содержащийся в классе групп $\mathfrak{X}$, называется: 1) ω-*насыщенным в* $\mathfrak{X}$ [6], [11], если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой нормальной подгруппы N группы G такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G / N \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$; 2) ω-*примитивно замкнутым* (или, кратко, ω*P*-*замкнутым*) *в* $\mathfrak{X}$ [6], если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ из $G / \mathrm{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G следует $G \in \mathfrak{F}$; 3) ω*P*-*гомоморфом в* $\mathfrak{X}$ [6], если $\mathfrak{F}$ – гомоморф, который ω*P*-замкнут в $\mathfrak{X}$.

***Лемма* 1.3** [6, лемма 2.1]. *Если $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, то любой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ является ω-насыщенным в $\mathfrak{X}$.*

***Лемма* 1.4** [6, теорема 3.1]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ и группа $G \in \mathfrak{X}$. Если G является расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы, то в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор.*

***Лемма* 1.5** [8, лемма A.1.2]. *Пусть U, V и W – подгруппы группы G. Тогда и только тогда*

$$U \cap VW = (U \cap V)\,(U \cap W),$$

когда

$$UV \cap UW = U\,(V \cap W).$$

2 Основные результаты

Пусть G – группа, H – ее подгруппа такая, что,

$$N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)\,(N_2 \cap H) \qquad (2.1)$$

для любых нормальных ω-подгрупп N_1 и N_2 из G. Будем говорить в этом случае, что *H обладает свойством* (2.1).

***Лемма* 2.1.** *Если подгруппа H группы G обладает свойством* (2.1), *то HN / N обладает свойством* (2.1) *для любой нормальной ω-подгруппы N из G.*

Доказательство. Возьмем любые нормальные ω-подгруппы N_1 / N и N_2 / N из G / N. Тогда N_1 и N_2 – нормальные ω-подгруппы группы G. По условию H обладает свойством (2.1). Поэтому $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)\,(N_2 \cap H)$. Используя тождество Дедекинда, имеем

$$N_1N_2 \cap HN = (N_1N_2 \cap H)\,N =$$
$$= (N_1 \cap H)\,(N_2 \cap H)\,N = (N_1 \cap HN)\,(N_2 \cap HN).$$

Тогда

$N_1 / N{\cdot}N_2 / N \cap HN / N = (N_1N_2 \cap HN) / N = (N_1 \cap HN)(N_2 \cap HN) / N = (N_1 / N \cap HN / N)(N_2 / N \cap HN / N)$.

Итак, HN / N обладает свойством (2.1). □

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– наследственный гомоморф,* $\mathfrak{F}$ *– ωP-гомоморф в* $\mathfrak{X}$ *и* $G \in \mathfrak{X}$. *Если G является расширением ω-группы с помощью* $\mathfrak{F}$*-группы и любой* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-проектор группы G обладает свойством* (2.1), *то в* G / N *любой* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-проектор обладает свойством* (2.1), *где N – произвольная нормальная ω-подгруппа из G.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{X}$ – гомоморф, имеем $G / N \in \mathfrak{X}$. По условию в G найдется нормальная ω-подгруппа K такая, что $G / K \in \mathfrak{F}$. Поскольку KN / N – нормальная ω-подгруппа в G / N и $G / N / KN / N \cong G / K / KN / K \in \mathfrak{F}$, заключаем, что $G / N \in \mathfrak{E}_{\omega}\mathfrak{F}$.

Если $O_{\omega}(G) = 1$, то $G \in \mathfrak{F}$. Тогда G является своим $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором и обладает свойством (2.1). Предположим, что $O_{\omega}(G) \neq 1$. Возьмем любой $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор S/N группы G/N. Так как $S \in \mathfrak{X}$ и $S \in \mathfrak{E}_{\omega}\mathfrak{F}$, по лемме 1.4 в S существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор H. По определению 0.1 $S / N = HN / N$. Ввиду лемм 1.2 и 2.1 S / N обладает свойством (2.1). □

Гомоморф $\mathfrak{F}$ будем называть *ω-формацией*, если из $G / A \in \mathfrak{F}$ и $G / B \in \mathfrak{F}$ для любых нормальных ω-подгрупп A и B из G всегда следует, что $G / A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Ясно, что если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то ω-формация является формацией.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– наследственная формация,* $\mathfrak{F}$ *– ωP-гомоморф в* $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$ *и G является расширением ω-группы с помощью* $\mathfrak{F}$*-группы. В группе G всякий* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-проектор обладает свойством* (2.1) *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{F}$ *– ω-насыщенная в* $\mathfrak{X}$ *ω-формация.*

Доказательство. Необходимость. По лемме 1.3 $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенным классом в $\mathfrak{X}$.

Предположим, что если $\mathfrak{X}$-группа является расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы, то всякий ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор обладает свойством (2.1).

Докажем, что $\mathfrak{F}$ является ω-формацией. Допустим, что это не выполняется. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G / A \in \mathfrak{F}$ и $G / B \in \mathfrak{F}$ для нормальных ω-подгрупп A и B из G, а $G / A \cap B \notin \mathfrak{F}$.

Если $K = A \cap B \neq 1$, то $G / K / A / K \cong G / A \in \mathfrak{F}$ и $G / K / B /K \cong G / B \in \mathfrak{F}$. По выбору G заключаем, что $G / K / (A / K \cap B / K) \cong G / A \cap B \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Предположим, $A \cap B = 1$. Пусть N – минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, содержащаяся в A. Тогда $G / N / A / N \cong G / A \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – гомоморф, имеем

$$G / N / BN / N \cong G / B / BN / B \in \mathfrak{F}.$$

По выбору G, заключаем, что

$$G / N / (A / N \cap BN / N) \cong G / A \cap BN =$$
$$= G / (A \cap B)\,N = G / N \in \mathfrak{F}.$$

Итак, можно считать, что A и B – минимальные нормальные ω-подгруппы группы G.

Поскольку $G / A \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, $G / B \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – формация, заключаем $G \cong G/A \cap B \in \mathfrak{X}$. Так как G является расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы, по лемме 1.4 в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор H. Тогда $G / A = HA / A$ и $G / B = HB / B$. Поэтому $G = HA = HB$. Так как $AB \cap H = (A \cap H)\,(B \cap H)$, по лемме 1.5 имеем $AH \cap BH = (A \cap B)\,H$. Откуда $G = H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $\mathfrak{F}$ – ω-формация. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим теперь, что $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной в $\mathfrak{X}$ ω-формацией. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathfrak{X}$, G является расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы, но в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор H, который не обладает свойством (2.1). Тогда в G имеются нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2, для которых

$$N_1N_2 \cap H \neq (N_1 \cap H)\,(N_2 \cap H).$$

Предположим, что $L = N_1 \cap N_2 \neq 1$. По лемме 1.2 (1) HL / L – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G/L. Так как $\mathfrak{X}$ – гомоморф, $G / L \in \mathfrak{X}$. Из $G \in \mathfrak{E}_{\omega}\mathfrak{F}$ следует, что в G найдется нормальная ω-подгруппа K такая, что $G / K \in \mathfrak{F}$. Тогда $G / L / KL / L \cong$ $\cong G / K / KL / K \in \mathfrak{F}$ и KL / L – нормальная ω-подгруппа в G / L. Поэтому G / L является расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы. По выбору G следует, что HL / L обладает свойством (2.1). Значит,

$$(N_1 / L)\,(N_2 / L) \cap HL / L =$$
$$= (N_1 / L \cap HL / L)\ \ (N_2 / L \cap HL / L)\ =$$
$$= (N_1 \cap H)\,(N_2 \cap H)\,L / L.$$

Откуда $N_1N_2 \cap HL = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)L$. Поэтому

$$N_1N_2 \cap H = N_1N_2 \cap HL \cap H =$$
$$= (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)L \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H),$$

что противоречит выбору G.

Допустим, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Рассмотрим $D = N_1H \cap N_2H$. Ясно, что $N_1D = N_1H$ и $N_2D = N_2H$. Тогда

$$N_iD / N_i \cong D / N_i \cap D \cong H / N_i \cap H \in \mathfrak{F},\ i = 1, 2.$$

Ввиду $G \in \mathfrak{X}$ и наследственности $\mathfrak{X}$, имеем $D \in \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{F}$ – ω-формация,

$$D / (N_1 \cap D \cap N_2 \cap D) \cong D \in \mathfrak{F}.$$

Из $\mathfrak{F}$-максимальности H в G и $H \le D$ следует, что $H = D$. Отсюда $N_1H \cap N_2H = (N_1 \cap N_2)H$. Ввиду леммы 1.5 имеем $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$. Получили противоречие с выбором G. □

***Определение* 2.1.** Пусть $\mathfrak{X}$ – гомоморф, $\mathfrak{F}$ – ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$. Будем обозначать через $b^{\omega}(\mathfrak{F})$ следующий класс групп: $b^{\omega}(\mathfrak{F}) = (G \in \mathfrak{X} \mid O_{\omega}(G) \ne 1$, $G \notin \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой неединичной нормальной ω-подгруппы N из $G)$.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – ωP-гомоморф, $G \in \mathfrak{X}$ и G является расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы. Группа $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, как в G любой $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор обладает свойством* (2.1), *тогда и только тогда, когда $b^{\omega}(\mathfrak{F})$ состоит из ω-примитивных групп, имеющих только две минимальные нормальные ω-подгруппы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{X}$-группа, являющаяся расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы, принадлежит $\mathfrak{F}$ всякий раз, как ее любой $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор обладает свойством (2.1). Пусть $D \in b^{\omega}(\mathfrak{F})$. Тогда $D \notin \mathfrak{F}$, $O_{\omega}(D) \ne 1$ и $D / \mathrm{Core}_D(M) \cap O_{\omega}(D) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M из D с $\mathrm{Core}_D(M) \cap O_{\omega}(D) \ne 1$. Так как $\mathfrak{F}$ – ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ и $D \notin \mathfrak{F}$, в D существует максимальная подгруппа M с $\mathrm{Core}_D(M) \cap O_{\omega}(D) = 1$. Значит, D является ω-примитивной группой с ω-примитиватором M. По лемме 1.1 D содержит не более двух минимальных нормальных ω-подгрупп.

Допустим, что в D существует единственная минимальная нормальная ω-подгруппа N. По выбору D фактор-группа $D / N \in \mathfrak{F}$. Тогда D является расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы. Так как $D \in \mathfrak{X}$ по лемме 1.4 в D существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор. Пусть H – произвольный $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор из D. Из определения 0.1 следует, что $D = HN$.

Возьмем произвольные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2 из D. Так как N – единственная минимальная нормальная ω-подгруппа в D, $N \le N_1 \cap N_2$ и $N_i = N_i \cap HN = (N_i \cap H)N$ для $i = 1, 2$. Используя тождество Дедекинда, имеем

$$N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)N(N_2 \cap H)N \cap H =$$
$$= (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)(N \cap H) = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H).$$

Это означает, в D любой $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор H обладает свойством (2.1). По условию $D \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с $D \in b^{\omega}(\mathfrak{F})$.

Таким, образом, D имеет только две минимальные нормальные ω-подгруппы. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что $b^{\omega}(\mathfrak{F})$ состоит из ω-примитивных групп, в которых имеется только две минимальные нормальные ω-подгруппы. Пусть G – группа наименьшего такая, что G – $\mathfrak{X}$-группа, являющаяся расширением ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы, в G любой $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор обладает свойством (2.1), а $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда в G найдется нормальная ω-подгруппа N такая, что $G / N \in \mathfrak{F}$. Из $G \notin \mathfrak{F}$ следует, что $O_{\omega}(G) \ne 1$. Пусть L – нормальная ω-подгруппа группы G и $L \ne N$. Из $G / L \in \mathfrak{X}$, LN / L – нормальная ω-подгруппа в G / L и

$$G / L / LN / L \cong G / N / LN / N \in \mathfrak{F},$$

заключаем, что $G / L \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}_{\omega}\mathfrak{F}$. Если R / L – любой $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G / L, то ввиду леммы 1.4 и определения 0.1 $R / L = SL / L$ для некоторого $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора S группы R. По лемме 1.2 (2) S – $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор группы G. Ввиду леммы 2.1 $R / L = SL / L$ обладает свойством (2.1). По выбору G имеем $G / L \in \mathfrak{F}$.

Следовательно, $G \in b^{\omega}(\mathfrak{F})$. По предположению в G существуют только две минимальные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2. Так как $G / N_i \in \mathfrak{F}$, имеем $G = N_iH$, для любого $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора H группы G, $i = 1, 2$. Тогда с одной стороны $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ по выбору G. С другой стороны по лемме 1.1 $N_1 \cap H = N_2 \cap H = 1$ и $N_1N_2 \cap H \cong N_i$, $i = 1, 2$. Отсюда следует противоречие $1 \ne N_i \cong 1$. □

Заключение

В работе исследована связь $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов группы с произведениями нормальных ω-подгрупп. Найден критерий, при котором $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ для любого $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора H группы G и любых нормальных в G ω-подгрупп N_1 и N_2 в расширении ω-группы с помощью $\mathfrak{F}$-группы. В качестве следствий получаются как известные, так и новые результаты.

Если $\omega = \mathbf{P}$, то ωP-гомоморф является классом Шунка. Для $\omega = \mathbf{P}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ из теоремы 2.1 получается отмеченная выше теорема Хупперта-Ти Ена.

***Следствие* 1** [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Шунка. Для группы G, ее любого $\mathfrak{F}$-проектора H и ее любых нормальных подгрупп N_1 и N_2 выполняется равенство $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.*

***Следствие* 2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая ω-насыщенная формация и G – группа, у которой $\mathfrak{F}$-корадикал является ω-подгруппой. Тогда*

$$N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H) \text{ и } N_1H \cap N_2H = (N_1 \cap N_2)H$$

для любого $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора H из G и любых нормальных ω-подгрупп N_1 и N_2 из G.

Если $\omega = \mathbf{P}$, то ω-примитивная группа является примитивной группой и $b^{\omega}(\mathfrak{F}) = b(\mathfrak{F})$ – Q-граница в смысле определения III, 2.1 (c) из [8]. При $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ из теоремы 2.2 вытекает

***Следствие* 3** [12]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Шунка. Группа $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, как $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)\cdot(N_2 \cap H)$ для любого $\mathfrak{F}$-проектора H и любых нормальных подгрупп N_1 и N_2 из G, тогда и только тогда, когда $b(\mathfrak{F})$ состоит из примитивных групп, имеющих только две минимальные нормальные подгруппы.*

Результаты работы анонсированы в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gaschütz*, *W*. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.

2. *Gaschütz*, *W*. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschütz // Notes on pure mathematics 11. – Australian National University: Canberra, 1979. – 100 p.

3. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

4. *Schunck*, *H*. $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / H. Schunck // Math. Z. – 1967. – Bd. 97, № 4. – S. 326–330.

5. *Erickson*, *R*. Projectors of finite groups / R. Erickson // Commun. Algebra. – 1982. – Vol. 10, № 18. – P. 1919–1938.

6. *Ведерников*, *В.А*. $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 6. – С. 957–968.

7. *Huppert*, *B*. Zur Theorie der Formationen / B. Huppert // Arch. Math. – 1969. – Vol. 19, № 6. – P. 561–574.

8. *Doerk*, *K*. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 898 p.

9. *Förster*, *P*. Subnormal subgroups and formation projectors / P. Förster // J. Austral. Math. Soc. Series A. – 1987. – Vol. 42. – P. 31–47.

10. *Монахов*, *В.С*. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Вышэйшая школа: Минск, 2006. – 206 с.

11. *Скиба*, *А.Н*. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. тр. – 1999. – Т. 2, № 2. – Р. 114–147.

12. *Васильева*, *Т.И*. Проекторы и решетки нормальных подгрупп конечных групп / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 34–37.

13. *Васильева*, *Т.И*. Обобщенные проекторы конечных групп / Т.И. Васильева // Всероссийская конференция по математике, посвященная 140-летию Томского государственного университета и 70-летию механико-математического факультета: сборник тезисов (Томск, 2–4 октября, 2018 г.). – Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2018. – С. 10–11.

Поступила в редакцию 03.04.19.