Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 5

УДК 513.873 *МАТЕМАТИКА*

С. З. ШЕФЕЛЬ

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОГРУЖЕНИЯ КЛАССА C^1

(Представлено академиком А. Д. Александровым 27 III 1970)

Погружение в эвклидово пространство $\mathbf{R}^3$ двумерного риманового многообразия поверхностью F класса C^1 или даже $C^{1,\alpha}$ при малых α, как следует из работ [1-3], может быть таким, что для поверхности F нарушаются связи между ее внутренней и внешней геометрией, присущие поверхностям класса C^2. Так, например, замкнутая поверхность с положительной внутренней кривизной может не быть выпуклой, поверхность с отрицательной кривизной — седловой, а поверхность, изометричная плоскости, может не быть цилиндром.

В связи с этим имеет смысл рассматривать изометрические погружения в $\mathbf{R}^3$ класса C^1, подчиненные некоторым дополнительным ограничениям.

К таким ограничениям относится условие ограниченности внешней кривизны поверхности [4] и условие принадлежности поверхности классу $C^{1,\alpha}$ при $\alpha > {}^2/_3$ [5].

В настоящей заметке на изометрические погружения поверхностью класса C^1 накладывается условие $\mathfrak{A}$-регулярности.

Определение. Изометрическое погружение метрики класса K поверхностью F в $\mathbf{R}^3$ называется **регулярным** в классе K относительно группы аффинных преобразований $\mathfrak{A}$ пространства $\mathbf{R}^3$ ($\mathfrak{A}$-регулярным), если при любом аффинном преобразовании $\mathbf{R}^3$ поверхность F преобразуется в поверхность, являющуюся изометрическим погружением некоторой метрики того же класса K.

Погружения в $\mathbf{R}^n$, регулярные относительно группы преобразований $\mathbf{R}^n$, рассматривались в [6].

Обозначим A, A^+, A^-, A^0 соответственно классы метрик ограниченной кривизны, неотрицательной, неположительной кривизны и нулевой кривизны (класс локально-эвклидовых метрик).

Теоремами 1—3 устанавливаются структурные свойства $\mathfrak{A}$-регулярных погружений метрик классов A^+, A^-, A^0. Теоремы 4—6 устанавливают связи между условиями ограниченности внешней кривизны, $\mathfrak{A}$-регулярностью и принадлежностью поверхности классу $C^{1,\alpha}$ при $\alpha > {}^2/_3$. При этом следует дополнительно заметить, что погружение метрики любого из классов A, A^+, A^-, A^0 поверхностью ограниченной внешней кривизны, очевидно, является $\mathfrak{A}$-регулярным. Теорема 6 является обобщением аналогичной теоремы Ю. Ф. Борисова [5].

Теорема 1. *Если поверхность $F \in C^1$ есть $\mathfrak{A}$-регулярное погружение в $\mathbf{R}^3$ метрики класса A^+, то для любой ее точки M справедливо по крайней мере одно из следующих утверждений:*

(α). *Некоторая окрестность точки M на поверхности F есть выпуклая поверхность (в частности, эта окрестность может быть плоской областью).*

(β). *Через точку M проходит прямолинейный отрезок $\pi(M)$, лежащий на поверхности F, концы его расположены на границе F, касательная плоскость к F вдоль отрезка $\pi(M)$ стационарна. Если точка M не имеет на поверхности F плоской окрестности, то такой отрезок единственный и никакая его точка не имеет плоской окрестности на F.*

Теорема 1′. *Если поверхность F удовлетворяет условиям теоремы 1, то каждая горбушка, срезаемая с поверхности F плоскостью, есть выпуклая поверхность.*

Теорема 2. *Если поверхность F есть $\mathfrak{A}$-регулярное погружение в $\mathbf{R}^3$ метрики класса A^-, то F — седловая поверхность.*

Теорема 3. *Если поверхность F в $\mathbf{R}^3$ класса C^1 есть $\mathfrak{A}$-регулярное погружение метрики класса A^0, то для любой ее точки M справедливо по крайней мере одно из следующих утверждений:*

(α). *Некоторая окрестность точки M на поверхности F есть плоская область.*

(β). *Через точку M проходит прямолинейный отрезок $\pi(M)$, лежащий на поверхности F, с концами на границе F, касательная плоскость к F вдоль $\pi(M)$ стационарна. Если точка M не имеет на поверхности F плоской окрестности, то такой отрезок единственный и никакая его точка не имеет плоской окрестности на F.*

Теорема 4. *Если поверхность F класса $C^{1,\alpha}$ $(\alpha > 1/2)$ есть $\mathfrak{A}$-регулярное погружение в $\mathbf{R}^3$ метрики одного из классов A^+, A^-, A^0, то F есть поверхность ограниченной внешней кривизны.*

Теорема 5. *Если поверхность F класса $C^{1,\alpha}$ $(\alpha > 2/3)$ есть погружение в $\mathbf{R}^3$ метрики одного из классов A, A^+, A^-, A^0, то это погружение F есть $\mathfrak{A}$-регулярное погружение.*

Из теорем 1—5 вытекает

Теорема 6. *Если поверхность $F \in C^{1,\alpha}$ $(\alpha > 2/3)$ есть погружение в $\mathbf{R}^3$ метрики одного из классов A^+, A^-, A^0, то она есть поверхность ограниченной внешней кривизны и для нее выполнено утверждение соответствующей структурной теоремы 1, 2 или 3.*

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Если поверхность F удовлетворяет условиям теоремы 1, задается уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in K$, где K — замкнутая область плоскости x, y, и если во внутренних точках K $f(x, y) > 0$, а на границе K $f(x, y) = 0$,* то *F есть выпуклая поверхность.*

Центральным моментом доказательства леммы 1 является следующее утверждение: некоторая окрестность «вершины» любой горбушки, срезаемой плоскостью с поверхности F, есть выпуклая поверхность.

Лемма 2. *Если поверхность $F \in C^1$ — седловая и есть изометрическое погружение метрики класса A^0, то для нее выполнены утверждения теоремы 2.*

Доказательство. Введем на поверхности F новую топологию, индуцируемую гауссовым отображением F на сферу. Разобьем F на два множества F^0 и $F' = F \setminus F^0$, где F^0 есть множество точек F, внутренних относительно введенной выше топологии. Если F^0 непусто, то внешняя кривизна F^0 совпадает с внутренней, что доказывается аппроксимацией поверхности F^0 с C^1 последовательностью седловых многогранников. Отсюда по теореме А. В. Погорелова ([4]) следует, что для точек F^0 выполнены утверждения теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 приведено в ([6]).

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству леммы 2. Заметим только, что из условия $F \in C^{1,\alpha}$ $(\alpha > 1/2)$ следует, что образ множества F' на сфере имеет нулевую меру.

Доказательство теоремы 5 опирается на работу ([7]). Пусть $F \in C^{1,\alpha}$ $(\alpha > 2/3)$, внутренняя метрика F принадлежит классу $\mathbf{A}$. Определим на F вполне аддитивную на кольце борелевских множеств функцию множества σ, которая на каждой области $G \subset F$ со спрямляемой границей L совпадает с величиной $\Delta(L')$, где L' — сферическое изображение L, а Δ — ориентированная площадь L'.

Пусть α — аффинное преобразование $\mathbf{R}^3$, G — область на F, ограниченная гладкой кривой.

Если вариация $|\sigma(F)| < \infty$, то имеет место формула

$$\sigma(\alpha(G)) = \int_G J(x')\, \sigma(dG),$$

где x' — сферическое изображение точки $x \in G$, $J(x')$ — якобиан диффеоморфизма β единичной сферы S на себя, определяемый равенством $x' = \beta(\alpha(x')')$ при всех $x' \in S$. Из (7) следует, что для того чтобы поверхность $F \in C^{1,\alpha}$ ($\alpha > 1/2$) была изометрическим погружением метрики класса A, необходимо и достаточно, чтобы вариация $|\sigma(F)| < \infty$. При этом внутренняя кривизна $\omega(F) \equiv \sigma(F)$.

Автор выражает благодарность Ю. Ф. Борисову за ряд полезных дискуссий.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
13 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Нэш, Сборн. пер. Математика, 1, 2 (1957). [2] Н. Х. Кейпер, Там же. [3] Ю. Ф. Борисов, Усп. матем. наук, 15, в. 3 (93) (1960). [4] А. В. Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, 1969. [5] Ю. Ф. Борисов, Вестн. Ленингр. унив., № 19 (1960). [6] С. З. Шефель, Сиб. матем. журн., 20, 2 (1970). [7] Ю. Ф. Борисов, Вестн. Ленингр. унив., № 7, № 19 (1958); № 1, № 13 (1959).