Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Н. Н. ЯНЕНКО, Б. И. КВАСОВ

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИКУБИЧЕСКИХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

1. Пусть на отрезке $[a, b]$ имеется сетка

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = b, \tag{1}$$

в узлах которой заданы значения некоторой функции

$$f:\ f_0, f_1, \ldots, f_{n+1}. \tag{2}$$

Предположим, что выполнено, кроме того, одно из условий

$$\text{а)}\ f'_x|_\Gamma = \varphi, \quad \text{б)}\ f''_{xx}|_\Gamma = \psi \tag{3}$$

или в) f-периодична с периодом $b - a$. Ясно, что можно рассмотреть также случай, когда на одной границе задано условие а), на другой — условие б).

Назовем кубической сплайн-функцией решение краевой задачи с граничными условиями а), б) или в) для уравнения

$$a(x)\,\partial^4 u / \partial x^4 = 0; \tag{4}$$

$$a(x)\begin{cases} = 0, & x \in \Delta, \\ > 0, & x \,\overline{\in}\, \Delta, \end{cases} \tag{5}$$

и такое, что

$$u(x) \in C_2[a, b], \quad u(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n+1. \tag{6}$$

Для численного решения полученной первой краевой задачи введем на $[a, b]$ сетку δ, включающую в себя сетку Δ. Число внутренних узлов сетки δ обозначим через m, конечномерные векторные пространства, соответствующие сеткам Δ, δ — через V_n, V_m. Заменяя (4) системой конечноразностных уравнений, имеем

$$\bar{a}\Lambda u = 0, \tag{7}$$

где $\bar{a}$ — сеточная выборка функции $a(x)$, Λ — положительный разностный 5-точечный аналог оператора d^4 / dx^4.

Учитывая краевые условия (2), уравнения (7) можно переписать в матричном виде

$$A(Du - g) = 0, \tag{8}$$

где D — пятидиагональная матрица в V_m — конечномерный аналог оператора d^4 / dx^4, A — диагональная матрица в V_m, нулевые элементы которой соответствуют узлам сетки Δ.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (5) рассмотрим итерационный процесс

$$u^{k+1} = u^k - \tau(Lu^k - Ag), \tag{9}$$

где $L = AD$ — неотрицательная матрица в V_m, τ — итерационный параметр.

Известным образом итерационный процесс (9) сводится к соответствующему итерационному процессу с положительной матрицей в $(m-n)$-мерном пространстве V_{m-n}, где V_{m-n} — ортогональное дополнение V_n в V_m. Сходимость процесса доказана в ([3]).

Существенным для итерационного процесса (9) является выбор вектора начального приближения $u^0=\{u_0^0,\ldots,u_{m+1}^0\}$, осуществляемый таким образом, чтобы

$$u_{i_\alpha}^0=f(x_{i_\alpha}),\quad \alpha=0,\ldots,n+1 \tag{10}$$

в точках $i_\alpha\in\Delta$.

2. Пусть в области

$$G:\ \{a<x<b,\ c<y<d\},\quad \bar G=G+\Gamma,$$

задана прямоугольная сетка

$$\Delta:\quad \begin{array}{l} a=x_0<x_1<\ldots<x_{n_1}=b,\\ c=y_0<y_1<\ldots<y_{n_2}=d, \end{array}$$

на которой определены значения $f_{ij}=f(x_i,y_j)$.

Определим двумерную сплайн-функцию как решение краевой задачи в области G в аналогичных предположениях задания на Γ 1-й или 2-й нормальных производных или периодичности решение по одной или обеим переменным для уравнения

$$a(x,y)\,[\partial^4u/\partial x^4+\partial^4u/\partial y^4]=0, \tag{11}$$

где

$$a(x,y)\begin{cases}=0, & (x,y)\in\Delta,\\ >0, & (x,y)\,\overline{\in}\,\Delta,\end{cases} \tag{12}$$

при условии

$$u(x)\in C_2(\bar G),\quad u(x_i,y_j)=f_{ij}. \tag{13}$$

Вводя аналогично пункту 1 двумерную прямоугольную сетку δ, пространства $V_{n_1n_2}$, $V_{m_1m_2}$, заменяя (11) системой конечноразностных уравнений, приходим к системе разностных уравнений в пространстве $V_{m_1m_2}$

$$\Lambda u=\bar a[\Lambda_1u+\Lambda_2u]=0, \tag{14}$$

где $\bar a$ — сеточная выборка функции $a(x,y)$; Λ_1, Λ_2 — положительные разностные аппроксимации $\partial^4u/\partial x^4$, $\partial^4u/\partial y^4$.

Для решения рассмотрим итерационный процесс в дробных шагах типа расщепления

$$\begin{gathered} u^{n+1/2}=u^n-\tau\bar a\Lambda_1u^{n+1/2},\\ u^{n+1}=u^{n+1/2}-\tau\bar a\Lambda_2u^{n+1} \end{gathered} \tag{15}$$

или же стабилизирующего оператора

$$B\,\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}=B_1B_2\,\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}=\bar a\Lambda u^n=\bar a\,(\Lambda_1+\Lambda_2)\,u^n \tag{16}$$

(см. ([2])). Доказательство сходимости итерационного процесса (15) аналогично п. 1. Предложенный метод годится для любой p-мерной области

$$G:\ \{a_i<x_i<b_i;\quad i=1,\ldots,p\},\quad \bar G=G+\Gamma$$

с нерегулярной сеткой Δ. При этом задача состоит лишь в выборе функции $a(x_1,\ldots,x_p)$ — неотрицательной, достаточно гладкой, обращающейся в 0 в узлах сетки Δ и вектора начального приближения такого, что $u^0=f$ в точках $i_\alpha=\{i_{1\alpha_1},\ldots,i_{p\alpha_p}\}\in\Delta$.

Заметим, что число q подынтервалов сетки δ, приходящихся на один интервал сетки Δ, не зависит от детальности сетки. В случае одномерного кубического сплайна можно положить $q=4$, и тогда решение итерационной схемы (9) является точным решением задачи (4) — (6).

По итерационному процессу (15) была проведена серия численных экспериментов. В качестве области $\bar{G}$ рассматривался квадрат $\{0 \leqslant x, y \leqslant \leqslant 1\}$. Сетка Δ бралась равномерной. В качестве множителя $a(x, y)$ из (12) брались функции $a(x, y) = b_1(x) b_2(y)$, где $b(s)$ — функции различной гладкости (от C_0 до C_∞), принимающие нулевые значения в точках одномерной сетки Δ.

Для сравнения результатов с теми же данными было осуществлено построение бикубической сплайн-функции согласно процедуре, описанной в [3, 4].

Расчеты дали хорошее совпадение, хотя предлагаемое определение сплайн-функции не эквивалентно с определением из [4] уже в двумерном случае.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Новосибирский государственный университет

Поступило
20 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Кузнецов, ДАН, 184, № 2, 274 (1969). [2] Н. Н. Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач метематической физики, «Наука», 1967. [3] J. L. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, The Theory of Splines and their Applications, N.Y.— London, 1967. [4] C. De Boor, J. Math. and Phys., 41, 3, 212 (1962).