МАТЕМАТИКА

УДК 517.9+537.86

О НЕПРЕРЫВНОЙ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧЕСКОМ ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СЛОЖНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON CONTINUOUS IN THE MEAN SQUARE DEPENDENCE ON THE INITIAL DATA OF SOLUTIONS OF ONE COMPLEX STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEM WITH DELAY

S.P. Zhogal, S.I. Zhogal

F. Scorina Gomel State University

Исследованы вопросы непрерывной в среднем квадратическом зависимости от начальных данных решений систем дифференциальных уравнений, содержащих стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа и обыкновенные стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием, связанные между собой запаздывающими связями.

Ключевые слова: *стохастические дифференциальные уравнения*, *запаздывание*, *стохастические дифференциальные уравнения в частных производных*, *звенья с сосредоточенными параметрами*, *звенья с распределенными параметрами.*

The problems of the continuous in the mean square dependence on the initial data of the solutions of systems of differential equations containing a stochastic differential equation in partial derivatives of a hyperbolic type and ordinary stochastic differential equations with delay, which are connected by delay connections, are investigated.

Keywords: *stochastic differential equations*, *delay*, *stochastic partial differential equations*, *units with lumped parameters*, *units with distributed parameters.*

Введение

При исследовании многих сложных систем современной науки и техники, особенно в таких отраслях, как теория управления, радиофизика, радиотехника и электроника, необходимо исследовать динамические системы с учетом случайных возмущений [1]–[3]. Довольно большой класс реальных сложных систем может быть описан математическими моделями в виде систем стохастических дифференциальных уравнений, содержащих уравнения в частных производных и уравнения в обыкновенных производных с отклонением по времени, связанные между собой запаздывающими связями. В монографии [4] исследованы подобные системы, которые описываются системой уравнений, содержащей взаимосвязанные уравнения в частных производных и обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием.

1 Постановка задачи

В работе [5] доказана теорема о существовании и единственности с точностью до стохастической эквивалентности непрерывного по своим аргументам с вероятностью единица решения следующей системы стохастических дифференциально-функциональных уравнений, содержащей уравнения в частных производных и уравнения в обыкновенных производных с отклоняющимся аргументом, связанные между собой запаздывающими связями и краевыми условиями:

$$\frac{\partial^2 u(t,\overline{x})}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{L}_{ij}(\overline{x})\right)\frac{\partial u(t,\overline{x})}{\partial x_j}\right\} - -\beta(\overline{x})u(t,\overline{x}) + +F\left[t,\overline{x},u(t-\Delta_r,\overline{x}),y_k(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\overline{x})}{\partial x_i},\frac{\partial u(t-\Delta_r,\overline{x})}{\partial t},\frac{dy_k(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right] + \tag{1.1}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{M}\Phi_{\mu}\left[t,\overline{x},u(t-\Delta_r,\overline{x}),y_k(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\overline{x})}{\partial x_i},\frac{\partial u(t-\Delta_r,\overline{x})}{\partial t},\frac{dy_k(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right]\frac{dw_{\mu}(t)}{dt};$$

$$\frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} = \sum_{p=1}^{K}\left\{\sum_{l=0}^{R}\left(a_{kpl}y_p(t-\Delta_l)+b_{kpl}\frac{dy_p(t-\Delta_l)}{dt}\right)\right\} + +f_k\left[t,u(t-\Delta_r,\overline{\zeta}),y_p(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\overline{\zeta})}{\partial x_i},\frac{\partial u(t-\Delta_r,\overline{\zeta})}{\partial t},\frac{dy_p(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\right] + \tag{1.2}$$

$$+\sum_{\eta=1}^{M'}g_{k\eta}\left[t,u(t-\Delta_r,\overline{\zeta}),y_p(t-\Delta_r),\frac{\partial u(t-\Delta_r,\overline{\zeta})}{\partial x_i},\right.$$

$$\frac{\partial u(t-\Delta_r,\overline{\zeta})}{\partial t},\frac{dy_p(t-\Delta_r)}{dt},\varepsilon\Bigg]\frac{d\xi_{k\eta}(t)}{dt}$$

$$(k,\,p=\overline{1,K},\,r=\overline{0,R},\,i=\overline{1,n})$$

с начальными условиями

$$u(t,\overline{x})_{|t\in E_0}=\varphi_0(t,\overline{x}), \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial u(t,\overline{x})}{\partial t}_{|t\in E_0}=\varphi_1(t,\overline{x}), \qquad (1.4)$$

$$y_k(t)_{|t\in E_0}=h_{k0}(t),\,k=\overline{1,K}, \qquad (1.5)$$

$$\frac{dy_k(t)}{dt}_{|t\in E_0}=h_{k1}(t),\,k=\overline{1,K}, \qquad (1.6)$$

и краевым условием

$$p_0u(t,\overline{x})+p_1\frac{\partial u(t,\overline{x})}{\partial v}_{|\overline{x}\in S}=0, \qquad (1.7)$$

где, согласно [5], $t\in[0,T]\subset R$, $T<\infty$, $\overline{x}$ – n-мерный вектор, принадлежащий ограниченной области $\overline{\Gamma}\subset E_n$, E_n – n-мерное евклидово пространство, S – замыкание области $\overline{\Gamma}$, $u(t,\overline{x})$ – случайная функция, определенная на множестве $[0,T]\times\overline{\Gamma}\times\Omega$, $y_k(t)$ – случайные функции, определяемые на $[0,\mathrm{T}]\times\Omega$, $w_\mu(t)$, $\xi_{k\eta}(t)$ – стохастически независимые между собой винеровские процессы единичной интенсивности, F, Φ_μ, f_k, $g_{k\eta}$ – нелинейные функционалы, $\mathcal{L}_{ij}(\overline{x})$, $\beta(\overline{x})$ – детерминированные функции, определяемые в области $\overline{\Gamma}$, a_{kpl}, b_{kpl}, p_0, p_1 – вещественные постоянные, Δ_r, Δ_l, $r,l=0,1,...R$ – неотрицательные постоянные $(\Delta_0=0)$, $\overline{\zeta}\in\overline{\Gamma}$ – некоторое фиксированное значение $\overline{x}$, E_0 – начальное множество вида $[-\Delta_{max},0]$, где $\Delta_{max}=\max\{\Delta_0,\Delta_1,...,\Delta_R\}$, $\varphi_0(t,\overline{x})$, $\varphi_1(t,\overline{x})$ – случайные функции, определенные на множестве $E_0\times\overline{\Gamma}\times\Omega$, $h_{k0}(t)$, $h_{k1}(t)$ – случайные функции, определенные на множестве $E_0\times\Omega$, $\varepsilon>0$ – малый параметр, v – направление внешней нормали к поверхности S, $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ – вероятностное пространство с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и вероятностной мерой $P(A)$, в котором выделен некоторый поток (монотонно неубывающее семейство) σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$. Все вводимые случайные функции, как функции аргумента t, предполагаются подчиненными потоку $(\mathcal{F}_t)$, т. е. для каждого t $\mathcal{F}_t$-измеримыми.

Многие сложные системы вида (1.1)–(1.7), содержащие одно звено с распределенными параметрами и K звеньев с сосредоточенными параметрами, могут быть описаны ([5], [6]) с высокой степенью точности следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$\frac{dv^m(t,\varepsilon)}{dt}=\mathcal{L}_mv^m(t,\varepsilon)+$$
$$+F_m[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]+$$
$$+\Phi_m[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]\dot{w}(t),\ m=1,2,...; \qquad (1.8)$$

$$\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt}=\sum_{l=0}^{R}A_lz(t-\Delta_l,\varepsilon)+$$
$$+f[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]+ \qquad (1.9)$$
$$+g[t,v(t-\Delta_r,\varepsilon),z(t-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon]\dot{\xi}(t),$$

с начальными условиями

$$v^m(t,\varepsilon)_{|t\in E_0}=\psi_m(t),\ m=1,2,...$$
$$\mathrm{z}(t,\varepsilon)_{|t\in E_0}=H(t), \qquad (1.10)$$

где

$$z^k(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}z_1^k\\z_2^k\end{bmatrix},\ v^m(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}v_1^m\\v_2^m\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L}_m=\begin{bmatrix}0&1\\-\alpha_m&0\end{bmatrix},\ F_m(t,v,z,\varepsilon)=\begin{bmatrix}0\\\tilde{F}_m\end{bmatrix},$$

$$\Phi_m(t,v,z,\varepsilon)=\begin{bmatrix}0&0&...&0\\\tilde{\Phi}_{1m}&\tilde{\Phi}_{2m}&...&\tilde{\Phi}_{Mm}\end{bmatrix},$$

$$v(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}v^1\\v^2\\\vdots\\v^m\\\vdots\end{bmatrix},\ f[t,v,z,\varepsilon]=\begin{bmatrix}0\\f_1\\\vdots\\0\\f_K\end{bmatrix},$$

$$z(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}z^1\\z^2\\\vdots\\z^K\end{bmatrix},\ \dot{w}(t)=\begin{bmatrix}0&\dot{w}_1\\0&\dot{w}_2\\\vdots&\vdots\\0&\dot{w}_M\end{bmatrix},$$

$$g[t,v,z,\varepsilon]=\begin{bmatrix}0&0&\dots&0\\g_{11}&g_{12}&\cdots&g_{1M'}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&0\\g_{K1}&g_{K2}&\cdots&g_{KM'}\end{bmatrix},$$

$$A_0=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0&0\\a_{110}&b_{110}&a_{120}&\cdots&a_{1K0}&b_{1K0}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&0&1\\a_{K10}&b_{K10}&a_{K20}&\cdots&a_{KK0}&b_{KK0}\end{bmatrix},$$

$$H(t)=\begin{bmatrix}h_{10}\\h_{11}\\\vdots\\h_{K0}\\h_{K1}\end{bmatrix},\ \psi_m(t)=\begin{bmatrix}\varphi_{0m}\\\varphi_{1m}\end{bmatrix},$$

$$A_i=\begin{bmatrix}0&0&\dots&0&0\\a_{11i}&b_{11i}&\dots&a_{1Ki}&b_{1Ki}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0&0\\a_{K1i}&b_{K1i}&\dots&a_{KKi}&b_{KKi}\end{bmatrix},$$

$$\dot{\xi}(t)=\begin{bmatrix}0 & \dot{\xi}_{11} & \ldots & \dot{\xi}_{K1}\\ 0 & \dot{\xi}_{12} & \ldots & \dot{\xi}_{K2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \dot{\xi}_{1M'} & \ldots & \dot{\xi}_{KM'}\end{bmatrix}.$$

Для вектора $v(t,\varepsilon)$ положим, что

$$\left|v(t,\varepsilon)\right|^2=\max_m\left\{\max_i\left|v_i^m(t,\varepsilon)\right|^2,\ i=1,2,\ldots\right\},\quad m=1,2,\ldots \tag{1.11}$$

2 Основной результат

Для системы (1.8)–(1.10) справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть система* (1.8)–(1.10) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *вектор-функционалы* F_m, f, *матрицы* g, Φ_m *измеримы по совокупности своих переменных и непрерывны по* t, ε;

2) *существуют такие постоянные* K_{1m}, K_2, K_{3m}, *что справедливы неравенства*

$$\left|F_m(t,v_1,z_1,\varepsilon)-F_m(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|+$$
$$+\left|\Phi_m(t,v_1,z_1,\varepsilon)-\Phi_m(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|\le$$
$$\le K_{1m}\left\{\left|v_1-v_2\right|+\left|z_1-z_2\right|\right\},$$
$$\left|f(t,v_1,z_1,\varepsilon)-f(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|+$$
$$+\left|g(t,v_1,z_1,\varepsilon)-g(t,v_2,z_2,\varepsilon)\right|\le$$
$$\le K_2\left\{\left|v_1-v_2\right|+\left|z_1-z_2\right|\right\},$$
$$\left|\mathcal{L}_m\right|\le K_{3m},\ m=1,2,\ldots;$$

3) *существуют такие постоянные* K_{4m}, K_5, *что*

$$\left|F_m(t,v,z,\varepsilon)\right|^2+\left|\Phi_m(t,v,z,\varepsilon)\right|^2\le K_{4m}\left\{1+\left|v\right|^2+\left|z\right|^2\right\},$$
$$\left|f(t,v,z,\varepsilon)\right|^2+\left|g(t,v,z,\varepsilon)\right|^2\le K_5\left\{1+\left|v\right|^2+\left|z\right|^2\right\},$$
$$m=1,2,\ldots;$$

4) *компоненты вектор-функций* $H(t)$, $\psi_m(t)$, $m=1,2,\ldots$ *непрерывны и ограничены при* $t\in E_0$ *и некоррелированы между собой и с процессами* $\dot{w}(t)$ *и* $\dot{\xi}(t)$;

5) *характеристическое уравнение*

$$\mathrm{Det}\left\{\sum_{l=0}^{R}A_l e^{-\Delta_l\rho}-E\rho\right\}=0$$

имеет все корни с вещественной частью, удовлетворяющей неравенству $\mathrm{Re}\,\rho_j\le-\gamma<0$, *где* $\gamma>0$.

Тогда решение $\{v(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\}$ *системы* (1.8)–(1.10) *непрерывно в среднем квадратическом зависит от возмущений на начальном множестве.*

Доказательство. В силу теоремы о существовании и единственности с точностью до стохастической эквивалентности непрерывного по своим аргументам с вероятностью единица решения [5] система (1.8)–(1.10) имеет единственное решение, удовлетворяющее системе интегральных уравнений

$$v^m(t,\varepsilon)=v^m(0,\varepsilon)+\int_0^t\Big[\mathcal{L}_m v^m(\tau,\varepsilon)+$$
$$+F_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\Big]d\tau+$$
$$+\int_0^t\Phi_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)dw(\tau);$$
$$z(t,\varepsilon)=V(t)H(0)+$$
$$+\sum_{l=1}^{R}\int_{-\Delta_l}^{0}V(t-\Delta_l-\tau)A_lH(\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^tV(t-\tau)f(\tau,v(\tau-,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\tau+ \tag{2.1}$$
$$+\int_0^tV(t-\tau)\,g(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)d\xi(\tau)$$
$$(m=1,2,\ldots;\ r=\overline{0,R}),$$

где $V(t)$ – матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dV(t)}{dt}=\sum_{l=0}^{R}A_lV(t-\Delta_l) \tag{2.2}$$

с начальным условием

$$V(t)=\begin{cases}\mathbf{0}, & t<0;\\ E, & t=+0;\end{cases}$$

$\mathbf{0}$ – нулевая матрица, E – единичная матрица.

Введем в рассмотрение случайный вектор-процесс $\{\tilde{v}(t,\varepsilon),\tilde{z}(t,\varepsilon)\}$, являющийся решением системы (1.8)–(1.9) с начальными условиями

$$\tilde{v}^m(t,\varepsilon)_{|t\in E_0}=\tilde{\psi}_m(t),\ m=1,2,\ldots$$
$$\tilde{z}(t,\varepsilon)_{|t\in E_0}=\tilde{H}(t), \tag{2.3}$$

такими, что

$$M\left\{\left|\tilde{\psi}_m(t)-\psi_m(t)\right|^2\right\}\le\delta,\ M\left\{\left|\tilde{H}(t)-H(t)\right|^2\right\}\le\delta.$$

Рассмотрим квадрат разности решений $\{v(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)\}$ и $\{\tilde{v}(t,\varepsilon),\tilde{z}(t,\varepsilon)\}$. Применяя операцию математического ожидания и используя неравенство Колмогорова – Дуба [7], с учетом условий теоремы, получаем:

$$M\left\{\sup_{s\le t}\left|v^m(s,\varepsilon)-\tilde{v}^m(s,\varepsilon)\right|^2\right\}\le$$
$$\le 3M\left\{\left|v^m(0,\varepsilon)-\tilde{v}^m(0,\varepsilon)\right|^2\right\}+$$
$$+3M\left[\int_0^t\Big|\mathcal{L}_m(v^m(\tau,\varepsilon)-\tilde{v}^m(\tau,\varepsilon))+\right.$$
$$+F_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)- \tag{2.4}$$
$$\left.-F_m(\tau,\tilde{v}(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\tilde{z}(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\Big|d\tau\right]^2+$$
$$+12M\left[\int_0^t\Big|\Phi_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.$$

$$-\Phi_m(\tau,\tilde v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\tilde z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\big|dw(\tau)\Bigg]^2 \le$$

$$\le 3M\left\{\left|v^m(0,\varepsilon)-\tilde v^m(0,\varepsilon)\right|^2\right\}+$$

$$+3TM\left[\int_0^t\left|\mathcal{L}_m(v^m(\tau,\varepsilon)-\tilde v^m(\tau,\varepsilon))+\right.\right.$$

$$+F_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$\left.\left.-F_m(\tau,\tilde v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\tilde z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2 d\tau\right]+$$

$$+12M\left[\int_0^t\left|\Phi_m(\tau,v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Phi_m(\tau,\tilde v(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\tilde z(\tau-\Delta_r,\varepsilon),\varepsilon)\right|^2\right]d\tau\le 3\delta+$$

$$+(6TK_{3m}^2+12K_{1m}^2(T+2))\times$$

$$\times\int_0^t M\left(\sup_{s\le\tau}\left[\left|v(s,\varepsilon)-\tilde v(s,\varepsilon)\right|^2+\left|z(s,\varepsilon)-\tilde z(s,\varepsilon)\right|^2\right)d\tau.$$

Проводя аналогичные выкладки для математического ожидания квадрата разности процессов $z(t,\varepsilon)$ и $\tilde z(t,\varepsilon)$, получаем

$$M\left\{\sup_{s\le t}\left|z(s,\varepsilon)-\tilde z(s,\varepsilon)\right|^2\right\}\le$$

$$\le 4N\delta+4N\delta\sum_{l=0}^R\Delta_l^2\left|A_l\right|^2+$$

$$+(8NK_2^2(T+4))\int_0^t M\left(\sup_{s\le\tau}\left[\left|v(s,\varepsilon)-\tilde v(s,\varepsilon)\right|^2+\right.\right. \quad (2.5)$$

$$\left.\left.+\left|z(s,\varepsilon)-\tilde z(s,\varepsilon)\right|^2\right]\right)d\tau,$$

где константа N удовлетворяет неравенству $\left|V(t)\right|^2\le N$ при любом $t\in[-\Delta_{max},T]$, существование константы N вытекает из условия 5) теоремы. Складывая неравенства (2.4)–(2.5), получаем

$$M\left\{\sup_{s\le t}\left[\left|v(s,\varepsilon)-\tilde v(s,\varepsilon)\right|^2+\left|z(s,\varepsilon)-\tilde z(s,\varepsilon)\right|^2\right]\right\}\le$$

$$\le\delta\left(3+4N+4N\sum_{l=0}^R\Delta_l^2\left|A_l\right|^2\right)+$$

$$+2L\int_0^t M\left\{\sup_{s\le\tau}\left[\left|v(s,\varepsilon)-\tilde v(s,\varepsilon)\right|^2+\left|z(s,\varepsilon)-\tilde z(s,\varepsilon)\right|^2\right]\right\}d\tau,$$

где

$$L=\max\left\{\max_m\left[6TK_{3m}^2+12K_{1m}^2(T+2)\right],8NK_2^2(T+4)\right\}.$$

Применяя к полученному неравенству лемму Гронуолла – Белмана [8], получаем

$$M\left\{\sup_{s\le t}\left[\left|v(s,\varepsilon)-\tilde v(s,\varepsilon)\right|^2+\left|z(s,\varepsilon)-\tilde z(s,\varepsilon)\right|^2\right]\right\}\le$$

$$\le\delta\left(3+4N+4N\sum_{l=0}^R\Delta_l^2\left|A_l\right|^2\right)\exp\left(2LT\right).$$

Положив далее

$$\delta\left(\varepsilon_1\right)=\frac{\varepsilon_1}{3+4N+4N\sum_{l=0}^R\Delta_l^2\left|A_l\right|^2}\exp\left(-2LT\right),$$

приходим к следующему неравенству

$$M\left\{\sup_{s\le t}\left[\left|v(s,\varepsilon)-\tilde v(s,\varepsilon)\right|^2+\left|z(s,\varepsilon)-\tilde z(s,\varepsilon)\right|^2\right]\right\}\le\varepsilon_1,$$

которое и доказывает справедливость утверждений теоремы. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *To*, *C.W.S.* Nonlinear random vibration. Analytical techniques and applications / C.W.S. To. – CRC Press, 2012. – 292 p.

2. *Жогаль*, *С.П.* Исследование случайных автоколебательных систем с одной степенью свободы методом канонических разложений / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 37–41.

3. *Жогаль*, *С.П.* Применение метода канонических разложений при исследовании амплитуды установившихся колебаний в системах с одной степенью свободы / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, И.В. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 4 (37). – С. 103–109.

4. *Рубаник*, *В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. – Мн.: Изд-во «Университетское», 1985. – 143 с.

5. *Жогаль*, *С.П.* О существовании и единственности решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–54.

6. *Акири*, *И.К.* О существовании, единственности и непрерывной зависимости от параметра решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных / И.К. Акири, В.Г. Коломиец. – Киев: Ин-т математики АН УССР, препринт №86.3, 1986. – 19 с.

7. *Ватанабэ*, *С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

8. *Гихман*, *И.И.* Теория случайных процессов. Т. 3 / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

Поступила в редакцию 18.02.19.