МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ С РАЗРЕШИМЫМИ $\mathbb{X}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ СОМНОЖИТЕЛЯМИ

В.Н. Князина[1], **И.К. Чирик**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Университет гражданской защиты МЧС Беларуси, Минск*

FINITE FACTORED GROUPS WITH SOLUBLE $\mathbb{X}$-SUBNORMAL FACTORS

V.N. Kniahina[1], **I.K. Chirik**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk*

Устанавливаются новые признаки частичной разрешимости конечной факторизуемой группы с ограничениями на индексы в цепях подгрупп от сомножителей до группы. В частности, доказана разрешимость конечной группы $G = AB$ с разрешимыми сомножителями A и B при условии, что существуют цепи от подгрупп A и B до группы G, в которых индексы соседних ненормальных подгрупп либо нечетные, либо равны 2 или 4.

Ключевые слова*: конечная группа, разрешимая группа, факторизуемая группа, обобщенно субнормальная подгруппа.*

We establish new criteria of partial solubility of a finite factored group with restrictions on indices in chains of subgroups from factors to the group. In particular, it is proved that if A and B are soluble subgroups of a group G such that there exist chains from A and B to G in which indices of neighboring non-normal subgroups are either odd or equal to 2 or 4 and $G = AB$, then G is soluble.

Keywords*: finite group, soluble group, factored group, generalized subnormal subgroup.*

Введение

Пусть $\mathbb{X}$ – некоторое множество натуральных чисел, замкнутое относительно делителей, т. е. если $x \in \mathbb{X}$ и натуральное число y делит x, то $y \in X$.

Подгруппа H называется $\mathrm{K}\mathbb{X}$-субнормальной подгруппой группы G, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G \qquad (0.1)$$

такая, что для каждого i либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо $|H_i : H_{i-1}| \in X$, обозначается $H \ \mathrm{K}\mathbb{X}\mathrm{sn} \ G$. Цепь (0.1) будем называть $\mathrm{K}\mathbb{X}$-субнормальной для подгруппы H.

Если исключить возможность нормальности H_{i-1} в H_i, то получаем понятие $\mathbb{X}$-субнормальности. Если $\mathbb{X} = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то возникает случай $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальности.

Факторизуемые группы с $\mathbb{X}$-субнормальными и $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальными сомножителями исследовались в работах [1]–[8]. В частности, В.Н. Князина и В.Н. Тютянов [6] получили признаки разрешимости (r-разрешимости) группы $G = AB$ с разрешимыми (r-разрешимыми) $\mathbb{X}$-субнормальными подгруппами A и B для некоторых конкретных значений множества $\mathbb{X}$.

В настоящей работе мы переносим результаты работы [6] на случай, когда сомножители $\mathrm{K}\mathbb{X}$-субнормальны.

1 Вспомогательные результаты

Рассматриваются только конечные группы. В отношении терминологии и обозначений будем придерживаться [9].

Множества всех натуральных и простых чисел обозначаются через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ соответственно. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Если порядок группы X не делится на p, то X называется p'-группой. Группа, у которой факторы главного ряда либо имеют порядок p^n, $n \in \mathbb{N}$, либо являются p'-группами, называется p-разрешимой. Запись $Y \le X$ $(Y < X)$ означает, что Y – подгруппа (собственная) группы X. Порядок и индекс подгруппы Y в группе X обозначаются через $|Y|$ и $|X : Y|$ соответственно. A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n соответственно.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathbb{X}$ – некоторое множество натуральных чисел, замкнутое относительно делителей. Пусть H – подгруппа конечной группы G, N – нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если* H K$\mathbb{X}$sn G, *то* $(H \cap N)$ K$\mathbb{X}$sn N *и* HN / N K$\mathbb{X}$sn G / N;

(2) *если* $N \le H$ *и* H / N K$\mathbb{X}$sn G / N, *то* H K$\mathbb{X}$sn G;

(3) *если* $H \le L \le G$, H K$\mathbb{X}$sn L, L K$\mathbb{X}$sn G, *то* H K$\mathbb{X}$sn G;

(4) *если* H K$\mathbb{X}$sn G, *то* H^g K$\mathbb{X}$sn G *для любого* $g \in G$.

Доказательство. 1. Пусть H – K$\mathbb{X}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда существует существует цепь (0.1) такая, что H_{i-1} нормальна в H_i, либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$ для всех i. Рассмотрим следующую цепь в подгруппе N:

$$H \cap N = (H_0 \cap N) \le (H_1 \cap N) \le ... \le (H_n \cap N) = N.$$

Если H_{i-1} нормальна в H_i, то $H_i \cap N$ нормальна в H_i и $H_i \cap N \cap H_{i-1} = H_{i-1} \cap N$ нормальна в H_i. Пусть $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$. Так как

$$|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| = |(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|,$$

то по лемме об индексах

$$|H_i : H_{i-1}| = \\ = |H_i : (H_i \cap N)H_{i-1}|\,|(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|.$$

Поэтому $|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N|$ делит $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$. Поскольку $\mathbb{X}$ – множество натуральных чисел, замкнутое относительно делителей, то $|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| \in \mathbb{X}$ и $H \cap N$ K$\mathbb{X}$ *sn* N.

В фактор-группе G / N рассмотрим цепь подгрупп:

$$HN / N = \\ = H_0 N / N \le H_1 N / N \le \ldots \le H_n N / N = G / N.$$

Если H_{i-1} нормальна в H_i, то $H_{i-1}N / N$ нормальна в $H_i N / N$. Пусть $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$. Поскольку

$$|H_i N / N : H_{i-1} N / N| = |H_i N : H_{i-1} N| = \\ = \frac{|H_i : H_{i-1}|}{|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N|},$$

то HN / N то K$\mathbb{X}$ *sn* G / N. Здесь опять использовалось условие, что множество натуральных чисел $\mathbb{X}$ замкнуто относительно делителей.

2. Пусть $N \le H$ и H / N – K$\mathbb{X}$-субнормальная подгруппа группы G / N.

Тогда существует K$\mathbb{X}$-субнормальная цепь

$$H / N = H_0 / N \le H_1 / N \le \ldots \le H_n / N = G / N.$$

Следующая цепь будет K$\mathbb{X}$-субнормальной цепочкой для подгруппы H:

$$H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G.$$

Аналогично проверяются утверждения (3) и (4). □

***Лемма* 1.2.** *Пусть* $\mathbb{X}$ *– некоторое множество натуральных чисел, замкнутое относительно делителей. Пусть A* и *B –* K$\mathbb{X}$*-субнормальные подгруппы конечной группы G и G = AB. Если*

$$A = A_0 \le A_1 \le \ldots \le A_{n-1} \le A_n = G -$$

K$\mathbb{X}$*-субнормальная цепь, то* $A_t \cap B$ K$\mathbb{X}$*-субнормальная подгруппа в* A_t *для каждого t.*

Доказательство. Поскольку подгруппа B – K$\mathbb{X}$-субнормальна в G, то существует K$\mathbb{X}$-субнормальная цепь

$$B = B_0 \le B_1 \le \ldots \le B_{m-1} \le B_m = G.$$

По условию $G = AB$, а по тождеству Дедекинда

$$A_i = A(A_i \cap B), A_i \cap B_j = (A \cap B_j)(A_i \cap B), \forall i, j.$$

Понятно, что $A \cap B_j \cap A_i \cap B = A \cap B, \forall i, j$. Теперь

$$|A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}| = \frac{|A_i \cap B_j|}{|A_i \cap B_{j-1}|} =$$

$$= \frac{|A \cap B_j|\,|A_i \cap B|}{|A \cap B_j \cap A_i \cap B|} : \frac{|A \cap B_{j-1}|\,|A_i \cap B|}{|A \cap B_{j-1} \cap A_i \cap B|} =$$

$$= |A \cap B_j : A \cap B_{j-1}|.$$

Зафиксируем полученное равенство:

$$|A \cap B_j : A \cap B_{j-1}| = |A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}|. \quad (1.1)$$

По условию $G = AB$, а по тождеству Дедекинда

$$B_j = (A \cap B_j)B, |B_j| = |A \cap B_j|\,|B|\,|A \cap B|, \forall j,$$

$$|B_j : B_{j-1}| = |A \cap B_j : A \cap B_{j-1}|. \quad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) получаем:

$$|A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}| = |B_j : B_{j-1}|, \forall i, j. \quad (1.3)$$

Рассмотрим цепь подгрупп для $A_t \cap B$ в подгруппе A_t:

$$A_t \cap B = \\ = (A_t \cap B_0) \le (A_t \cap B_1) \le ... \le (A_t \cap B_m) = A_t. \quad (1.4)$$

Если B_{j-1} нормальна в B_j, то $A_t \cap B_{j-1} \cap B_j = A_t \cap B_{j-1}$ нормальна в $A_t \cap B_j$. Если B_{j-1} не нормальна в B_j, то $|B_j : B_{j-1}| \in \mathbb{X}$, а из (1.3) при $i = t$ следует, что

$$|A_t \cap B_j : A_t \cap B_{j-1}| \in \mathbb{X},$$

т. е. цепь (1.4) является K$\mathbb{X}$-субнормальной цепочкой для подгруппы $A_t \cap B$ в A_t. □

***Лемма* 1.3.** Если $U \le V \le G$ и K – субнормальная подгруппа в конечной группе G, то $|V \cap K : U \cap K|$ делит $|V : U|$.

Доказательство. По условию существует цепочка подгрупп

$$G = K_0 \ge K_1 \ge ... \ge K_m = K,$$

в которой подгруппа K_{i+1} нормальна в K_i для всех i. Так как K_1 – нормальная подгруппа группы G, то $UK_1 \le VK_1 \le G$ и

$$U / U \cap K_1 \simeq UK_1 / K_1 \le VK_1 / K_1 \simeq V / V \cap K_1.$$

По теореме Лагранжа существует натуральное число d такое, что

$$d \cdot \frac{|U|}{|U \cap K_1|} = \frac{|V|}{|V \cap K_1|},$$

$$d \cdot |V \cap K_1 : U \cap K_1| = |V : U|.$$

Таким образом, в случае, когда $K = K_1$ нормальна в G, лемма верна. Теперь можно применить индукцию к подгруппам $U \cap K_1 \leq V \cap K_1$ и субнормальной в $V \cap K_1$ подгруппе $V \cap K$. По индукции $|V \cap K : U \cap K|$ делит $|V \cap K_1 : U \cap K_1|$, поэтому $|V \cap K : U \cap K|$ делит $|V : U|$. □

2 Признак r-разрешимости при $\mathbb{X} = \mathbb{P}_2^2$

Зафиксируем натуральное число t и простое число p. Пусть

$$\mathbb{P}_r^t = \left\{p^i \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{r\}, i \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right\} \cup \cup \left\{r^j \mid j \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ j \leq t\right\}.$$

При $r = t = 2$ получаем множество

$$\mathbb{P}_2^2 = \left\{p^i \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{r\}, i \in \{0\} \cup \mathbb{N}\right\} \cup \cup \left\{2^j \mid j \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ j \leq 2\right\},$$

которое состоит из чисел 1, 2, 4 и всех натуральных степеней нечетных простых чисел.

Поскольку множество $\mathbb{P}_2^2$ замкнуто относительно делителей, то при $\mathbb{X} = \mathbb{P}_2^2$ мы можем применять леммы 1.1, 1.2. Нам потребуется еще следующий результат.

***Лемма* 2.1.** [10, теорема 1]. *Пусть G – конечная простая неабелева группа, $H < G$ и $|G : H| = p^a$, где p – простое число. Тогда имеет место одно из следующих утверждений*:

(1) $G \simeq A_n$, $H \simeq A_{n-1}$, *где* $n = p^a$;

(2) $G \simeq PSL(r, q)$, H – *параболическая подгруппа в* G,

$$|G : H| = \frac{q^r - 1}{q - 1} = p^a \text{ и } r \text{ – простое число;}$$

(3) $G \simeq PSL(2, 11)$, $H \simeq A_5$;

(4) $G \simeq M_{23}$, $H \simeq M_{22}$ *или* $G \simeq M_{11}$, $H \simeq M_{10}$;

(5) $G \simeq PSU_4(2) \simeq PSp_4(3)$, H – *параболическая подгруппа индекса* 27.

В частности, только группа $PSL(2,7)$ имеет подгруппы двух различных примарных индексов, их индексы равны 7 *и* 8.

***Теорема* 2.2.** *Пусть G – конечная группа и $r \in \pi(G)$. Если A и B – $\mathrm{K}\mathbb{P}_2^2$-субнормальные r-разрешимые подгруппы G и $G = AB$, то G является r-разрешимой группой.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, где A и B – r-разрешимые $\mathrm{K}\mathbb{P}_2^2$-субнормальные подгруппы, но группа G не является r-разрешимой. Ясно, что $A \neq G \neq B$.

Согласно условию существуют $\mathrm{K}\mathbb{P}_2^2$-субнормальные цепи

$$A = A_0 < A_1 < \ldots < A_{n-1} < A_n = G;$$

$$B = B_0 < B_1 < \ldots < B_{m-1} < B_m = G.$$

Подгруппа A $\mathrm{K}\mathbb{P}_2^2$-субнормальна в A_{n-1} по определению. По тождеству Дедекинда

$$A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B).$$

По лемме 1.2 подгруппа $A_{n-1} \cap B$ является $\mathrm{K}\mathbb{P}_2^2$-субнормальной в A_{n-1}. Так как $|A_{n-1}| < |G|$, то по индукции A_{n-1} r-разрешима. Если A_{n-1} нормальна в $A_n = G = A_{n-1}B$, то G r-разрешима, противоречие. Значит, $|G : A_{n-1}| \in \mathbb{P}_2^2$. Точно также, используя индукцию, заключаем, что B_{m-1} r-разрешима и $|G : B_{m-1}| \in \mathbb{P}_2^2$. Следовательно, $G = A_{n-1}B_{m-1}$ и подгруппы A и B можно считать максимальными в группе G, т. е. можно считать, что $A = A_{n-1}$ и $B = B_{m-1}$. Из определения $\mathbb{P}_2^2$-субнормальности следует, что

$$|G : A| = p^l, |G : B| = q^s,$$

$$\{p, q\} \subseteq \pi(G), l, s \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $l \leq 2$ при $p = 2$.

Рассмотрим случай, когда $p \neq q$. Предположим, что G – простая неабелева группа. Ввиду леммы 2.1 группа $G \simeq PSL(2,7)$. Но в этой группе примарные индексы максимальных подгрупп могут быть равными только 7 или 8. Это противоречит определению $\mathrm{K}\mathbb{P}_2^2$-субнормальной подгруппы. Получили противоречие. Поэтому в группе G имеется собственная минимальная нормальная подгруппа N. В силу леммы 1.1 (1) условия теоремы наследуются фактор-группами группы G, поэтому N не является r-разрешимой группой. Следовательно, N не содержится в A и N не содержится в B. Поскольку A и B максимальны в G, то $G = AN = BN$. Из полученных факторизаций имеем:

$$p^l = |G : A| = |N : (A \cap N)|,$$

$$q^s = |G : B| = |N : (B \cap N)|.$$

Так как

$$(|N : A \cap N|, |N : B \cap N|) = 1,$$

то $N = (A \cap N)(B \cap N)$. По лемме 1.1 (1) подгруппы $(A \cap N)$ и $(B \cap N)$ $\mathrm{K}\mathbb{P}_2^2$-субнормальны в N. По индукции N r-разрешима, противоречие.

Следовательно, $p = q$. Заметим

$$p^l = |G : A| = |B : A \cap B| > 1,$$

$$p^s = |G : B| = |A : A \cap B| > 1.$$

Используя лемму об индексах получаем:

$$|G : A \cap B| = |G : A||A : A \cap B| = p^{l+s} > p^l.$$

В силу леммы 2.1 группа G не простая. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда N не является r-разрешимой и

$$N = N_1 \times \cdots \times N_k,$$

где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. N не содержится в A и N не содержится в B. Применяем лемму 1.3 к цепочке подгрупп

$$A \cap B \leq A \leq G.$$

При $V = G$, $U = A$ и $K = N_1$ получаем, что $1 \neq |N_1 : A \cap N_1|$ делит $|G : A| = p^l$. Аналогично, $1 \neq |N_1 : B \cap N_1|$ делит $|G : B| = p^s$. При

$$V = G,\ U = A \cap B,\ K = N_1$$

получаем, что $1 \neq |N_1 : A \cap B \cap N_1|$ делит $|G : A \cap B| = p^{l+s}$. Итак, в простой группе N_1 содержатся подгруппы

$$A \cap N_1, B \cap N_1, A \cap B \cap N_1,$$

индексы которых являются степенями простого числа p. Согласно лемме 2.1

$$|N_1 : A \cap N_1| = |N_1 : B \cap N_1| = |N_1 : A \cap B \cap N_1|,$$
$$A \cap N_1 = A \cap B \cap N_1 = B \cap N_1.$$

Подгруппа $A \cap N_1$ субнормальна в A и $A \cap N_1 = B \cap N_1$ субнормальна в B. Согласно [11] подгруппа $A \cap N_1$ субнормальна в G и p-разрешима. Если $A \cap N_1 \neq 1$, то $(A \cap N_1)^G$ – неединичная нормальная p-разрешимая подгруппа в G, противоречие. Поэтому $A \cap N_1 = 1$. Поскольку $|N_1| = |N_1 : A \cap N_1|$ делит $|G : A| = p^l$, то N_1 – p-группа, что невозможно. □

3 Множество $\mathbb{X}$ состоит из примарных чисел

Множество

$$\mathbb{P}^\infty = \left\{ p^t \mid p \in \mathbb{P}, t \in \{0\} \cup \mathbb{N} \right\}$$

состоит из всех примарных чисел. Напомним, что примарным называют число, которое является неотрицательной целой степенью простого числа. Для $\mathrm{K}\mathbb{P}^\infty$-субнормальных подгрупп выполняются утверждения лемм 1.1 и 1.2, поскольку $\mathbb{P}^\infty$ замкнуто относительно делителей.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* G – конечная группа и $r \in \pi(G) \setminus \{2,3,7\}$. Если A и B – $\mathrm{K}\mathbb{P}^\infty$-субнормальные r-разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$, то G является r-разрешимой группой.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и G – минимальный контрпример. Аналогично доказательству теоремы 2.2 можно доказать, что подгруппы A и B максимальны в G. Если A_{n-1} нормальна в $A_n = G = A_{n-1}B$, или B_{n-1} нормальна в B_n то G r-разрешима, противоречие. Значит, $|G : A| = p^l$, $|G : B| = q^s$, где $\{p, q\} \subseteq \pi(G)$.

Сначала рассмотрим случай, когда $p \neq q$. Если G – простая неабелева группа, то в силу леммы 2.1 она изоморфна $PSL(2,7)$. Тогда, G – r'-группа. Противоречие с предположением, что G – контрпример минимального порядка. Поэтому минимальная нормальная подгруппа N в G отлична от G. Подгруппа N не является r-разрешимой и $N = N_1 \times \cdots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Поэтому $N \not\subseteq A$ и $N \not\subseteq B$. Из полученного условия максимальности подгрупп A и B в G заключаем, что $G = AN = BN$. Из равенств $|G : A| = p^l$, $|G : B| = q^s$ следует, что $G = AP = BQ$ для $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Поэтому

$$\frac{|A||N|}{|A \cap N|} = \frac{|A||P|}{|A \cap P|}$$

или

$$\frac{|N|}{|A \cap N|} = \frac{|P|}{|A \cap P|} = p^l,\ |N : A \cap N| = p^l.$$

Аналогично можно показать, что $|N : B \cap N| = q^s$. Так как

$$(|N : A \cap N|, |N : B \cap N|) = 1,$$

то $N = (A \cap N)(B \cap N)$. По лемме 1.1 (1) подгруппы $(A \cap N)$ и $(B \cap N)$ $\mathrm{K}\mathbb{P}^\infty$-субнормальны в N. По индукции N r-разрешима, противоречие.

Поэтому $p = q$. Повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 2.2, получаем противоречие с тем, что N не является r-разрешимой подгруппой. □

4 Множество $\mathbb{X}$ состоит из всех нечетных чисел и чисел 2 и 4

Множество

$$\mathbb{L} = \{2, 4\} \cup \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

состоит из всех нечетных чисел и чисел 2 и 4.

Нам потребуется следующий результат.

***Лемма* 4.1.** [12, теорема 3]. *Если A и B – разрешимые подгруппы нечетных индексов в конечной группе G и $G = AB$, то G разрешима.*

***Теорема* 4.2.** *Пусть A и B – $\mathrm{K}\mathbb{L}$-субнормальные подгруппы конечной группы G и $G = AB$. Если A и B разрешимы, то G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и пусть группа G – минимальный контрпример к теореме. По условию существует $\mathrm{K}\mathbb{L}$-субнормальная цепь подгрупп

$$A = A_0 < A_1 < \ldots < A_{n-1} < A_n = G.$$

Подгруппа A $\mathrm{K}\mathbb{L}$-субнормальна в A_{n-1} и $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$ по тождеству Дедекинда. По лемме 1.2 подгруппа $A_{n-1} \cap B$ $\mathrm{K}\mathbb{L}$-субнормальна в A_{n-1}. По индукции подгруппа A_{n-1} разрешима. Поэтому в факторизации $G = AB$ можно считать, что подгруппа $A = A_{n-1}$ максимальна. Аналогично, без ущерба для доказательства можно считать, что подгруппа B максимальна в G.

Из определения $\mathrm{K}\mathbb{L}$-субнормальности следует, что подгруппа A либо нормальна в G, либо

$|G:A| \in \mathbb{L}$. Если A нормальна в G, то $|G:A|$ – простое число и G разрешима, противоречие. Если индекс подгруппы A равен 2 или 4, то фактор-группа G/M_G изоморфна подгруппе симметрической группы S_4 степени 4. Здесь $M_G = \bigcap_{x \in G} M^x$ – ядро подгруппы M в группе G. Поскольку $|S_4| = 4! = 24$, то G разрешима. Опять получили противоречие. Следовательно, индекс подгруппы A в группе G нечетный. Аналогично, B – подгруппа нечетного индекса в G. По лемме 4.1 группа G разрешима. □

Отметим, что теоремы 2.2, 3.1 и 4.2 поглощают результаты работ [1], [4]–[6], [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Факторизуемые группы с разрешимыми факторами нечетных индексов / В.С. Монахов // В кн.: Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск. Наука и техника. – 1984. – С. 105–111.

2. *Monakhov*, *V.S.* Finite group with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–323.

3. *Kniahina*, *V.N.* On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // International Journal of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

4. *Князина*, *В.Н.* Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами / В.Н. Князина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 77–85.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О $\mathrm{K}\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Математические заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

6. *Тютянов*, *В.Н.* Факторизации конечных групп *r*-разрешимыми подгруппами с заданными вложениями / В.Н. Тютянов, В.Н. Князина // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 55, № 10. – С. 1431–1435.

7. *Monakhov*, *V.* Finite factorised groups with partially solvable $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V. Monakhov, V. Kniahina // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36, № 4. – P. 441–445.

8. *Чирик*, *И.К.* Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathrm{K}\mathbb{P}^2$-субнормальными подгруппами / И.К. Чирик // Математические заметки. Москва. – 2016. – Т. 99, № 1. – С. 97–101.

9. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

10. *Guralnick*, *R.M.* Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81, № 2. – P. 304–311.

11. *Wielandt*, *H.* Subnormalitat in faktorisierten endlichen Gruppen / H. Wielandt // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69. – P. 305–311.

12. *Казарин*, *Л.С.* Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами / Л.С. Казарин // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, 7–8. – С. 947–950.

Поступила в редакцию 20.01.19.