Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 517.55 *МАТЕМАТИКА*

И. И. БАВРИН

# ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПОЛИЦИЛИНДРА

*(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 29 V 1970)*

М. М. Джрбашяном ([1]) в случае круга были установлены обобщенные формулы Коши, Шварца и Пуассона, ассоциированные с данной функцией $\omega(x)\in\Omega$ *. Далее автором ([2]) также в случае круга были получены обобщенные формулы Коши, Шварца и Пуассона, ассоциированные с данной системой функций $\omega_j(x)\in\Omega$, $j=1,\ldots,m$. В настоящей заметке дается обобщение этих последних формул на случай полицилиндра.

Пусть функции $\omega_q^{(j)}(x)\in\Omega$, $q=1,2,\ldots,m_j$; $j=1,2,\ldots,n$. Пусть далее $p_q^{(j)}(0)=1$, $p_q^{(j)}(r)=r\int\limits_r^1\frac{\omega_q^{(j)}(x)}{x^2}dx$, $r\in(0,1]$, $\Delta_0^{(q,j)}=1$, $\Delta_k^{(q,j)}=$

$$=-(k+1)\int\limits_0^1 r^k\,dp_q^{(j)}(r)=k\int\limits_0^1 r^{k-1}\omega_q^{(j)}(r)\,dr;\ q=1,2,\ldots,m_j;\ j=1,2,\ldots,n;$$

$k=1,2,\ldots$**.

Автором ([2]) установлено, что если функция $f(re^{i\varphi})=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(re^{i\varphi})^k$ голоморфна в круге $|z|<R$, то функция

$$L^{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}[f(re^{i\varphi})]\equiv f_{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}(re^{i\varphi})=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k^{(1)}\ldots\Delta_k^{(m)}a_k(re^{i\varphi})^k$$

голоморфна в том же круге $|z|<R$, причем для любого $\rho$ $(0<\rho<R)$ справедлива интегральная формула

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}C\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\,\omega_1,\ldots,\omega_m\right)f_{(\omega_1,\ldots,\omega_m)}(\rho e^{i\theta})\,d\theta,\quad |z|<\rho.\qquad(1)$$

---

* Говорят (см. ([1]), стр. 1078), что функция $\omega(x)\in\Omega$, если она неотрицательна и непрерывна на $[0,1)$, причем $\omega(0)=1$, $\int\limits_0^1\omega(x)\,dx<+\infty$ и для любого $r$

$$(0\leqslant r<1)\ \int\limits_r^1\omega(x)\,dx>0.$$

** В ([1]) введена функция $p(r)=r\int\limits_r^1\frac{\omega(x)}{x^2}dx$, $\omega(x)\in\Omega$, $r\in(0,1]$, $p(0)=1$ и последовательность чисел $\Delta_k=-(k+1)\int\limits_0^1 r^k\,dp(r)$; $k=0,1,2,\ldots$ и при этом показано, что все числа $\Delta_k$, $k=0,1,2,\ldots$, положительны, причем $\Delta_0=1$, $\Delta_k=$ $=k\int\limits_0^1\omega(x)\,x^{k-1}dx$; $k=1,2,\ldots$

Пусть функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ голоморфна в полицилиндре $E\{|z_j| < R_j, j = 1, \ldots, n\}$. Тогда в $E$ имеем

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} \tag{2}$$

или

$$f(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n}) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_n} (r_1 e^{i\varphi_1})^{k_1} \ldots (r_n e^{i\varphi_n})^{k_n}.$$

Так как функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ голоморфна в $E$, то $f(z_1, \ldots, z_n)$ голоморфна по каждому переменному $z_1, \ldots, z_n$. В силу предыдущего, действуя оператором $L^{(\omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_{m_1}^{(1)})} = L_1^{M_1}$ на $f(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n})$ как на функцию $r_1$, будем иметь, что функция

$$L_1^{M_1}[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n})] = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \Delta_{k_1}^{(1,1)} \ldots \Delta_{k_1}^{(m_1, 1)} a_{k_1, \ldots, k_n} (r_1 e^{i\varphi_1})^{k_1} \ldots (r_n e^{i\varphi_n})^{k_n}$$

голоморфна в том же полицилиндре $E$. Аналогично, действуя оператором $L^{(\omega_1^{(2)}, \ldots, \omega_{m_2}^{(2)})} = L_2^{M_2}$ на $f(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n})$ как на функцию $r_2$, будем иметь, что функция

$$L_2^{M_2}[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n})] = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \Delta_{k_2}^{(1, 2)} \ldots \Delta_{k_2}^{(m_2, 2)} a_{k_1, \ldots, k_n} (r_1 e^{i\varphi_1})^{k_1} \ldots (r_n e^{i\varphi_n})^{k_n}$$

голоморфна в $E$, и т. д. В результате получаем, что функция

$$\begin{gathered}
L_{1, \ldots, n}^{M}[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n})] \equiv L_n^{M_n}[L_{n-1}^{M_{n-1}} \ldots [L_1^{M_1}[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n})]] \ldots] = \\
= \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \Delta_{k_1}^{(1, 1)} \ldots \Delta_{k_1}^{(m_1, 1)} \Delta_{k_2}^{(1, 2)} \ldots \Delta_{k_2}^{(m_2, 2)} \ldots \Delta_{k_n}^{(1, n)} \ldots \Delta_{k_n}^{(m_n, n)} \times \\
\times a_{k_1, \ldots, k_n} (r_1 e^{i\varphi_1})^{k_1} \ldots (r_n e^{i\varphi_n})^{k_n}
\end{gathered} \tag{3}$$

голоморфна в $E$.

Используя интегральную формулу (1), получим, что для любых $\rho_1, \ldots, \rho_n$, $0 < \rho_j < R_j$; $j = 1, \ldots, n$, при $|z_j| < \rho_j$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{gathered}
f(z_1, \ldots, z_n) = \\
= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n} C\left(e^{-i\theta_j} \frac{z_j}{\rho_j}; \omega_1^{(j)}, \ldots, \omega_{m_j}^{(j)}\right) L_{1, \ldots, n}^{M}[f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n})]\, d\theta_n.
\end{gathered} \tag{4}$$

Опираясь на последнюю формулу и используя в процессе доказательства соотношение между введенными автором [2] функциями $C(z; \omega_1, \ldots, \omega_m)$ и $S(z; \omega_1, \ldots, \omega_m)$, получим, что для любых $\rho_1, \ldots, \rho_n$; $0 < \rho_j < R_j$; $j = 1, \ldots, n$;

$$\begin{gathered}
f(z_1, \ldots, z_n) = i \operatorname{Im} f(0, \ldots, 0) + \\
+ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{j=1}^{n} \left[ S\left(e^{-i\theta_j} \frac{z_j}{\rho_j}; \omega_1^{(j)}, \ldots, \omega_{m_j}^{(j)}\right) + 1 \right] - 1 \right\} \times \\
\times \operatorname{Re} L_{1, \ldots, n}^{M}[f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n})]\, d\theta_n; \\
|z_j| < \rho_j; \quad j = 1, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{5}$$

Отсюда следует, что для любых $\rho_1, \ldots, \rho_n$; $0 < \rho_j < R_j$; $j = 1, \ldots, n$;

$$\operatorname{Re} f(z_1, \ldots, z_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{Re} \prod_{j=1}^{n} \left[ S\left( e^{-i\theta_j} \frac{z_j}{\rho_j}; \omega_1^{(j)}, \ldots, \omega_{m_j}^{(j)} \right) + 1 \right] - 1 \right\} \times$$

$$\times \operatorname{Re} L_{1, \ldots, n}^{M} [f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n})]\, d\theta_n; \qquad (6)$$

$$|z_j| < \rho_j; \quad j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, приходим к следующей теореме:

Теорема. *Пусть функция* (2) *голоморфна в полицилиндре* $E$. *Тогда функция* (3) *голоморфна в том же полицилиндре* $E$, *причем для любых* $\rho_1, \ldots, \rho_n$; $0 < \rho_j < R_j$; $j = 1, \ldots, n$; *справедливы интегральные формулы* (4) — (6).

Укажем на некоторые следствия интегральных формул (4) — (6).

**1.** $\omega_1^{(j)}(x) \equiv 1, \ldots, \omega_{m_j}^{(j)}(x) \equiv 1; \quad j = 1, \ldots, n.$

При этом условии формула (4) переходит в известную в теории функций многих комплексных переменных формулу Коши для полицилиндра.

2. $m_j = 1$; $j = 1, \ldots, n$;

$$\omega_1^{(j)}(x) = (1 - x)^{\alpha_j}, \quad -1 < \alpha_j < +\infty; \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (7)$$

В этом случае формула (4) принимает вид

$$f(z_1, \ldots, z_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n} C\left( e^{-i\theta_j} \frac{z_j}{\rho_j}; \omega_1^{(j)} \right) L_{1, \ldots, n}^{M} [f(\rho_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \rho_n e^{i\theta_n})]\, d\theta_n,$$

где

$$C(e^{-i\theta_j} z_j / \rho_j; \omega_1^{(j)}) = 1 / (1 - e^{-i\theta_j} z_j / \rho_j)^{1+\alpha_j}.$$

Аналогично каждая из формул (5), (6) приводит к двум соответствующим следствиям. Заметим, что при условии (7)

$$S(e^{-i\theta_j} z_j / \rho_j; \omega_1^{(j)}) = [2 / (1 - e^{-i\theta_j} z_j / \rho_j)^{1+\alpha_j}] - 1.$$

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
4 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 5, 1075 (1968). [2] И. И. Баврин, ДАН, 187, № 3 (1969).