Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 513.88+513.83+519.48 МАТЕМАТИКА

А. И. ВЕКСЛЕР

# О БАНАХОВОЙ И ДЕДЕКИНДОВОЙ ПОЛНОТЕ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ВЕКТОРНЫХ СТРУКТУР И МАКСИМАЛЬНЫХ КОЛЕЦ ЧАСТНЫХ

*(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 1 VI 1970)*

1. Пусть $B$ — произвольный бикомпакт. Через $C_0^*(B)$ будем обозначать множество всех вещественных функций, заданных, непрерывных и ограниченных на плотных открытых в $B$ множествах, с естественным отождествлением функций, совпадающих на пересечении их областей задания. В каждом классе всех эквивалентных функций (определяющих элемент из $C_0^*(B)$) имеется функция с наибольшей (открытой) областью задания. Очевидно, $C_0^*(B)$ при естественном определении операций и частичного порядка является кольцом (даже алгеброй над полем вещественных чисел), векторной структурой, а также линейным нормированным пространством относительно sup-нормы.

Нормированное пространство $C_0^*(B)$ не обязано быть банаховым, и в начале заметки находятся условия банаховой полноты $C_0^*(B)$ (теорема 2), они оказываются равносильными условиям дедекиндовой полноты $C_0^*(B)$. Далее в теореме 3 дается конструкция дедекиндова пополнения $C(B)$ на произвольном бикомпакте $B$, отличающаяся от ранее известной ([1]). Вторая половина заметки посвящена некоторым применениям теоремы 2. В теореме 4 дается ответ на вопрос, когда максимальное кольцо частных в смысле ([2]) для кольца $C(B)$ является дедекиндово полным. В п. 5 решается вопрос, когда дедекиндово пополнение условно счетно полной векторной структуры $X$ можно получить из $X$ таким же простым способом, каким получается дедекиндово пополнение булевой алгебры.

2. Прежде чем искать условия банаховости нормированного пространства $C_0^*(B)$ на бикомпакте $B$, установим некоторые порядковые свойства $K$-линеала (векторной структуры) $C_0^*(B)$.

Напомним некоторые определения, относящиеся к теории полуупорядоченных пространств (остальные читатель может найти в монографии Б. З. Вулиха ([3])). Компонентой в $K$-линеале $X$ называется всякое множество $X' \subset X$, являющееся дизъюнктным (ортогональным) дополнением какого-либо подмножества из $X$. Множество $\mathfrak{B}(X)$ всех компонент из $X$ является полной булевой алгеброй (по включению). Если любая компонента в $X$ является прямым слагаемым, то $X$ называют $K$-линеалом с проекциями. $K$-пополнение (дедекиндово пополнение) архимедова $K$-линеала $X$ обозначается через $\hat{X}$. $\hat{X}$ является наименьшим $K$-пространством (дедекиндово полным $K$-линеалом), содержащим $X$ ([4]).

Теорема 1. *Пусть $B$ — бикомпакт, $Y$ — $K$-линеал $C_0^*(B)$. Тогда:* а) *$C_0^*(B)$ является $K$-линеалом с проекциями*; б) *$C_0^*(B)$ условно полон для дизъюнктных множеств, т. е. если $\{y_\alpha\} \subset Y$, $y_\alpha > 0$, $y_{\alpha'} \wedge y_{\alpha''} = 0$ при $\alpha' \neq \alpha''$ и $y_\alpha \leqslant y \in Y (\alpha \in A)$, то в $Y$ существует $\sup\{y_\alpha : \alpha \in A\}$*; в) *$C_0^*(B)$ является наименьшим из всех $K$-линеалов, удовлетворяющих условиям* а) *и* б) *и содержащихся между $X = C(B)$ и его $K$-пополнением $\hat{X}$.*

Для произвольного архимедова $K$-линеала $X$ $K$-линеал $Y$, для которого выполнены утверждения теоремы 1, называется $S$-пополнением $X$ [5]. С учетом этого определения, результат теоремы 1 можно переформулировать так: *$C_0^*(B)$ есть $S$-пополнение $C(B)$*.

Для доказательства теоремы об условиях банаховости $C_0^*(B)$ используется лишь утверждение а) из теоремы 1, а для формулировки этой теоремы потребуется следующее.

Определение. Пусть $T$ — вполне регулярное пространство. Произвольное $\Gamma \subset T$ будем называть множеством категории $^1/_2$, если $\Gamma \subset \bigcup\{\Gamma_n\colon n \in N\}$, где $\Gamma_n$ — граница некоторого регулярного (канонического) открытого множества из $T$.

Очевидно, множество категории $^1/_2$ является и множеством 1 категории. С другой стороны, в экстремально несвязном бикомпакте нет непустых множеств категории $^1/_2$.

Теорема 2. *Для бикомпакта $B$ равносильны утверждения:* а) *$C_0^*(B)$ — банахово пространство*; б) *$C_0^*(B)$ — полный относительно сходимости с регулятором* [3] *$K$-линеал*; в) *$C_0^*(B)$ — $K_\sigma$-пространство (условно счетно полный $K$-линеал)*; г) *$C_0^*(B)$ — $K$-пространство*; д) *$C_0^*(B)$ — $P_1$-пространство в смысле теории банаховых пространств* [6]; е) *$C_0^*(B)$ — $KN$-пространство ограниченных элементов* [2]; ж) *$C_0^*(B)$ — $K$-пополнение $K$-линеала $C(B)$*; з) *в $B$ всякое множество категории $^1/_2$ нигде не плотно.*

Для экстремально несвязного бикомпакта выполняется утверждение з), другой большой класс таких бикомпактов будет выделен ниже с помощью теоремы 7.

Замечание. Можно определить $C_0^*(T)$ для произвольного вполне регулярного $T$ как множество всех функций, заданных и непрерывных на плотных открытых в $T$ множествах и мажорируемых функциях из $C(T)$ (с отождествлением). Тогда теорему 2 можно будет перенести, например, на случай локального бикомпакта $T$. Именно для этого случая будут равносильны утверждения б), в), г), ж), з) из теоремы 2 (если букву $B$ заменить на $T$).

3. Известна теорема, впервые установленная, кажется, К. Накано и Т. Шимогаки [1] о том, что $K$-пополнение $K$-линеала $C(B)$ изоморфно пространству всех функций на $B$, заданных, непрерывных и ограниченных на плотных в $B$ множествах, дополнительных к множествам 1 категории (с естественным отождествлением). Следующий результат в ряде случаев дает, возможно, более удобное описание $K$-пополнения $C(B)$ и, видимо, не выводится из теоремы К. Наконо и Т. Шимогаки.

Теорема 3. *$K$-пополнение $K$-линеала $C(B)$ может быть отождествлено с пространством всех вещественных функций, заданных, непрерывных и ограниченных на плотных в $B$ множествах, дополнительных к множествам категории $^1/_2$ (с естественным отождествлением функций, совпадающих на пересечении их областей задания).*

4. Результаты, установленные в теореме 2, могут быть использованы для решения вопроса о $K$-полноте максимального кольца частных в смысле Н. Файна, Л. Гиллмана и Дж. Ламбека [2] для кольца $C(B)$. Не давая здесь точных определений, отметим лишь, что для $C(B)$ это максимальное кольцо частных изоморфно кольцу $C_0(B)$ всех вещественных функций, заданных и непрерывных (ограниченность не требуется) на плотных открытых в $B$ множествах (с естественным отождествлением).

Теорема 4. *Пусть $B$ — бикомпакт, $Z = C_0(B)$ — максимальное кольцо частных в смысле* [2] *для кольца $C(B)$. Тогда следующие утверждения равносильны:* а) *$C_0(B)$ — $K_\sigma$-пространство*; б) *$C_0(B)$ — $K$-пространство*; в) *$C_0(B)$ — расширенное $K$-пространство, т. е. если $\{z_\alpha\} \subset Z$, $z_\alpha > 0$ и $z_{\alpha'} \wedge z_{\alpha''} = 0$, то в $Z$ существует $\sup\{z_\alpha\}$*; г) *$C_0(B)$ является максимальным расширением* [3] *$K$-пополнения $K$-линеала $C(B)$*; д) *в $B$ всякое множество категории $^1/_2$ нигде не плотно.*

5. Пусть $X$ — $K$-линеал, $x \in X$, $|x'| \wedge |x - x'| = 0$. Тогда элемент $x'$ называется осколком элемента $x$. Напомним, кстати, что всякий осколок элемента $x$ является проекцией $x$ в некоторую компоненту. В булевой алгебре осколок элемента — это просто меньший элемент.

Пусть $E$ — булева алгебра, $\hat{E}$ — ее дедекиндово пополнение. Тогда всякий $\hat{e} \in \hat{E}$, $\hat{e} > 0$ имеет ненулевой осколок $e \in E$. По этой причине $\hat{e} = \sup \{e_\alpha\}$, где $\{e_\alpha\} \subset E$ и $e_{\alpha'} \wedge e_{\alpha''}$ при $\alpha' \neq \alpha''$.

Для $K$-линеалов подобная ситуация, вообще говоря, места не имеет. В. А. Гейлером (7) был построен пример $K_\sigma$-пространства $X$ такого, что в его $K$-пополнении $\hat{X}$ существует элемент $\hat{x} > 0$, не имеющий ни одного нетривиального осколка, попадающего в $X$.

Определение. Будем называть $K_\sigma$-пространство $X$ осколочно насыщенным, если любой $\hat{x} \in \hat{X}$, $\hat{x} \neq 0$ имеет ненулевые осколки в $X$.

Следующий результат позволяет применить теорему 2 (см. также сказанное после теоремы 1) к решению задачи об условиях осколочной насыщенности $K_\sigma$-*пространства*.

Теорема 5. *$K_\sigma$-пространство осколочно насыщенно тогда и только тогда, когда его $K$-пополнение совпадает с $S$-пополнением.*

Заметим, что для $K_\sigma$-пространства $X$ его $S$-пополнение $Y$ устроено очень просто. Если $0 < y \in Y$, то найдется $\{x_\alpha\} \subset X$ такое, что $x_{\alpha'} \wedge x_{\alpha''} = 0$ и $y = \sup \{x_\alpha\}$. Таким образом, если $X$ осколочно насыщенно, то его $K$-пополнение получается из $X$ точно таким же способом, какой имеет место для булевых алгебр.

Напомним, что главная компонента или компонента, порожденная данным элементом $x$ в $K$-линеале $X$,— это наименьшая компонента из $X$, содержащая $x$. В $K_\sigma$-пространстве $X$ совокупность $\mathfrak{B}_0(X)$ всех главных компонент есть условно $\sigma$-полное подкольцо (подалгебра, если в $X$ есть порядковая единица) булевой алгебры $\mathfrak{B}(X)$. Обозначим через $H$ стоунов квазиэкстремальный (базисно несвязный) локальный бикомпакт булева кольца $\mathfrak{B}_0(X)$. Хорошо известно (8), что $X$ реализуется в виде пространства расширенных непрерывных функций на $H$. Будем называть $H$ собственным $\sigma$-пространством $K_\sigma$-пространства $X$.

Теорема 6. *$K_\sigma$-пространство $X$ осколочно насыщенно тогда и только тогда, когда в его собственном $\sigma$-пространстве всякое множество категории $^1/_2$ нигде не плотно.*

Из теоремы следует, что свойство осколочной насыщенности $K_\sigma$-пространства $X$ есть фактически свойство его булева кольца главных компонент $\mathfrak{B}_0(X)$. В некоторых же случаях осколочная насыщенность определяется уже свойствами полной булевой алгебры $\mathfrak{B}(X)$ всех компонент в $X$.

Определение. Будем говорить, что полная булева алгебра $E$ удовлетворяет условию $D$, если выполнено следующее условие: пусть $Q$ — стоунов бикомпакт для $E$, $Z = C_\infty(Q)$ — расширенное $K$-пространство всех непрерывных расширенных функций на $Q$, тогда всякое порядково неограниченное множество в $Z$ содержит счетно неограниченное подмножество.

Описание булевых алгебр, удовлетворяющих условию $D$, было дано в терминах экстремально несвязного бикомпакта $Q$ З. Т. Дикановой (9). Известно, например, что если максимальное расширение $K$-пополнения $X$ является $K^+$-пространством или же $X$ — $K_\sigma$-пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов (3), то $\mathfrak{B}(X)$ удовлетворяет условию $D$.

Теорема 7. *Если булева алгебра компонент $K_\sigma$-пространства $X$ удовлетворяет условию $D$, то $X$ — осколочно насыщенное $K_\sigma$-пространство.*

Заметим, что если в условиях теоремы $X$ имеет порядковую единицу, а $H$ — бикомпакт, являющийся собственным $\sigma$-пространством $X$, то для $H$ выполнены все утверждения теоремы 2.

Следствие 1. *Если максимальное расширение $K$-пополнения $X$ $K_\sigma$-пространства $X$ является $K^+$-пространством* (3), *то $X$ осколочно насыщенно.*

Следствие 2. *Если в X существует достаточное множество вполне линейных функционалов, то X осколочно насыщенно.*

Ленинградский институт
текстильной и легкой промышленности
им. С. М. Кирова

Поступило
21 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Nakano, T. Shimogaki, Proc. Japan. Acad., 38, № 8, 473 (1962). [2] N. J. Fine, L. Gillman, J. Lambek, Rings of Quotients of Rings of Functions, Montreal, 1966. [3] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, 1961. [4] А. И. Векслер, Сибирск. матем. журн., 10, № 6, 1206 (1969). [5] А. И. Векслер, Представления полуупорядоченного пространства с помощью функций и их применения к общей теории полуупорядоченных пространств, Диссертация, Ленингр. гос. пед. инст. им. А. И. Герцена, 1967. [6] J. Lindenstrauss, Extension of Compact Operators, Mem. Am. Math. Soc., № 48, 1964. [7] В. А. Гейлер, II Зональная конфер. пединститутов Северо-Западной зоны по математике, Тез. докл., 1970, стр. 34. [8] H. Nakano, Modern Spectral Theory, 1950. [9] З. Т. Диканова, Сибирск. матем. журн., 9, № 4, 804 (1968).