Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 518:517.948 МАТЕМАТИКА

Академик Г. И. МАРЧУК, В. Г. ВАСИЛЬЕВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрим линейное операторное уравнение

$$Ax = f, \quad x \in X, \quad f \in R(A) \subset X, \tag{1}$$

где X — банахово пространство, $A[X \to X]$ — линейный замкнутый оператор, причем непрерывная зависимость x от f не имеет места.

При решении уравнения (1) обычно вместо оператора A рассматривают некоторое h-параметрическое семейство операторов A_h, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, каждый из которых в определенном смысле близок к первоначальному:

$$\|(A - A_h)x\| \leqslant \alpha(h), \quad x \in D \subset X,$$

где $\alpha(h)$ — достаточно малая скалярная функция векторной переменной h, D — некоторое множество пространства X, к которому принадлежит решение уравнения (1).

Правая часть уравнения (1) в реальных условиях задается с погрешностью. Следовательно, можно считать, что вместо функции f известна функция f_h такая, что $\|f - f_h\| \leqslant \beta(h)$, где $\beta(h)$ имеет тот же смысл, что и $\alpha(h)$.

Поэтому наряду с исходным уравнением (1) рассмотрим «приближенное» уравнение

$$A_h x_h = f_h, \quad x_h \in X, \quad f_h \in R(A_h) \subset X, \tag{2}$$

где линейный замкнутый оператор $A_h[X \to X]$ при $h \neq h^0$, $h^0 = (h_1^0, h_2^0, \ldots, h_n^0)$ имеет ограниченный обратный. Относительно решения x_h уравнения (2) будем предполагать, что оно при $h \to h^0$ стремится к решению x уравнения (1). Мы не будем останавливаться на вопросе о достаточных условиях сходимости x_h к x при $h \to h^0$. Эти условия получены в ряде работ ([1-3] и др.).

Здесь следует отметить, что для сходимости x_h к x при $h \to h^0$, вообще говоря, необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{h \to h^0} \alpha(h) = \lim_{h \to h^0} \beta(h) = 0.$$

Для приближенного решения операторного уравнения (2) обычно используют итерационные методы. Однако, если h близко к h^0, то решение уравнения (2) ведет себя неустойчиво по отношению к вариациям оператора A_h и правой части f_h.

Поэтому при решении уравнения (2) необходимо учитывать погрешности, возникающие в результате замены оператора A на оператор A_h и соответственно f на f_h. Выбор числа итераций в качестве параметра регуляризации был использован в работах [2, 4] и др.

Однако, этот метод итерационной регуляризации для общего операторного уравнения первого рода по существу не является конструктивным, так как для его использования необходимо знать выражение модуля непрерывности обратного оператора.

В предлагаемой работе дано конструктивное выражение числа итераций через обычно известные величины.

Уравнение (2) будем решать с помощью универсального итерационного процесса ([5], [7])

$$x_h^{k+1} = x_h^k + B_h(f_h - A_h x_h^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$x_h^0 = B_h f_h, \quad \|f_h\| \neq 0,$$

где оператор $B_h[X \to X]$ удовлетворяет условию

$$0 < \|E - B_h A_h\| = q < 1 \quad \text{при } h \neq h^0.$$

Очевидно

$$x_h - x = A_h^{-1}[(f_h - f) + (A - A_h)x],$$

поэтому

$$\|x_h - x\| \leqslant \|A_h^{-1}\| [\|f - f_h\| + \|(A - A_h)x\|]. \tag{4}$$

Далее, из (3) следует

$$x_h - x_h^{k+1} = [E - B_h A_h]^{k+2} A_h^{-1} f_h,$$
$$\|x_h - x_h^{k+1}\| \leqslant q^{k+2} \|A_h^{-1}\| \cdot \|f_h\|. \tag{5}$$

Учитывая (4) и (5), получим

$$\|x - x_h^{k+1}\| \leqslant \|x_h^{k+1} - x_h\| + \|x_h - x\| \leqslant q^{k+2} \|A_h^{-1}\| \cdot \|f_h\| + \|A_h^{-1}\| (\alpha(h) + \beta(h)). \tag{6}$$

Из оценки (6) следует, что при $k \to \infty$ первое слагаемое правой части (6) стремится к нулю, второе же от k не зависит.

Поэтому итерационный процесс (3) имеет смысл закончить при $k = k_0 = [\delta]^+$, где δ — корень уравнения

$$q^{\delta+2} \|A_h^{-1}\| \cdot \|f_h\| = \|A_h^{-1}\| (\alpha(h) + \beta(h)), \tag{7}$$

$$[\delta]^+ = \begin{cases} [\delta], & \text{если } [\delta] > 0, \\ 0, & \text{если } [\delta] \leqslant 0, \end{cases}$$

$[\delta]$ — целая часть δ.

Из равенства (7) получим

$$\delta = \frac{1}{\ln q} \ln \frac{\alpha(h) + \beta(h)}{\|f_h\|} - 2. \tag{8}$$

Покажем, что

$$\lim_{h \to h^0} x_h^{k_0+1} = x.$$

Действительно, согласно (5) имеем

$$\|x_h^{k_0+1} - x\| \leqslant \|x_h^{k_0+1} - x_h\| + \|x_h - x\| \leqslant q^{k_0+2} \|x_h\| + \|x_h - x\| \leqslant$$
$$\leqslant q^{k_0+2} (\|x_h - x\| + \|x\|) + \|x_h - x\|.$$

Далее

$$q^{k_0+2} = q^{\delta - \{\delta\} + 2} = q^{-\{\delta\}} \frac{1}{\|f_h\|} (\alpha(h) + \beta(h)), \quad 0 \leqslant \{\delta\} < 1,$$

где $\{\delta\}$ — дробная часть числа δ.

Поэтому окончательно получим

$$\|x_h^{k_0+1} - x\| \leqslant q^{-\{\delta\}} \frac{\alpha(h) + \beta(h)}{\|f_h\|} (\|x_h - x\| + \|x\|) + \|x_h - x\|,$$

из которой следует наше утверждение.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Пусть X — банахово пространство, $A[X \to X]$ — линейный замкнутый оператор. Рассмотрим два уравнения (1) $Ax = f$, $f \in R(A)$ и (2) $A_h x_h = f_h$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $x_h \in X$, $f_h \in R(A_h) \subset X$, причем непрерывная зависимость x от f не имеет места. Пусть далее $\|f - f_h\| \leqslant \beta(h)$, $\|(A - A_h)x\| \leqslant \alpha(h)$, $x \in D$, $\lim\limits_{h \to h^0} \alpha(h) = \lim\limits_{h \to h^0} \beta(h) = 0$, $h^0 = (h_1^0, \ldots, h_n^0)$, D — некоторое множество пространства X, к которому принадлежит решение уравнения (1). Тогда, если линейный замкнутый опе-*

ратор $A_h[X\to X]$ *при* $h\neq h^0$ *имеет ограниченный обратный и выполняются условия:* 1) $\lim\limits_{h\to h^0} x_h = x$, 2) *оператор* $B_h[X\to X]$ *удовлетворяет условию* $0<\|E-B_hA_h\|=q<1$ *при* $h\neq h^0$, *то* $x=\lim\limits_{h\to h^0} x_h^{k_0+1}$, *где*

$$x_h^{k+1}=x_h^k+B_h(f_h-A_hx_h^k),\quad k=0,1,\ldots,$$

$$x_h^0=B_hf_h,\quad k_0=[\delta]^+,\quad \delta=\frac{1}{\ln q}\ln\frac{\alpha(h)+\beta(h)}{\|f_h\|}-2.$$

Отметим, что выражение для числа итераций k_0 является конструктивным, так как в это выражение входят обычно известные величины q, $\alpha(h)$, $\beta(h)$, $\|f_h\|$.

Очевидно, все сказанное выше справедливо и для случая, когда оператор A имеет ограниченный обратный.

Для решения операторного уравнения (2) часто используют также нестационарный универсальный итерационный процесс

$$x_h^{k+1}=x_L^k+B_k(h)(f_h-A_hx_h^k),\quad k=0,1,2,\ldots,\quad x_h^0=B_0(h)f_h,\tag{9}$$

где $B_k(h)[X\to X]$ — оператор, удовлетворяющий условию $0<$ $<\|E-B_k(h)A_h\|=q_k\leqslant q<1$ при $h\neq h^0$.

Условие $q_k\leqslant q$ естественное, так как во многих итерационных процессах величины q_k достаточно быстро выходят на асимптоту.

Нетрудно проверить, что в данном случае справедлива оценка

$$\|x_h-x_h^{k+1}\|\leqslant q_k\,q_{k-1}\ldots q_1q_0^2\|A_h^{-1}\|\cdot\|f_h\|\leqslant q^{k+2}\|A_h^{-1}\|\cdot\|f_h\|.\tag{10}$$

Так как последняя оценка совпадает с оценкой (5), то при решении операторного уравнения (1) с помощью универсального нестационарного процесса (9) имеет место вышеприведенная теорема.

В том случае, когда A_h — матрица n-го порядка, при решении уравнения (1) с помощью универсального процесса (3) можно учитывать накопление ошибок округления.

Для этого используем известные оценки погрешности округления итерационного процесса (3) при реализации его на ЭВМ с фиксированной запятой разрядности t ([6]). Пусть $2^{-t}\delta_k$ — ошибка, накопленная за k шагов, а $\bar{x}_h^k$ — k-е приближение, вычисленное на машине. Тогда имеет место следующая мажорантная оценка

$$\|\delta_k\|_2\leqslant\beta n^{3/2}2^{-t-1},\quad \beta=(1-q^k)/(1-q),\quad 2^{-t}\delta_k=x_h^k-\bar{x}_h^k.$$

Далее, имеем

$$\|x-\bar{x}_h^{k+1}\|\leqslant\|x_h-x_h^{k+1}\|+\|x_h^{k+1}-\bar{x}_h^{k+1}\|+\|x-x_h\|.$$

Используя (4), (5) и (10), последнее неравенство перепишем так:

$$\|x-\bar{x}_h^{k+1}\|\leqslant q^{k+2}\|A_h^{-1}\|\|f_h\|+\|A_h^{-1}\|(\alpha(h)+\beta(h))+\frac{1-q^{k+1}}{1-q}n^{3/2}2^{-2t-1}.$$

Поэтому вместо (7) в данном случае будем иметь следующее уравнение:

$$q^{\delta+1}\left(q\|f_h\|-\frac{1}{1-q}n^{3/2}\frac{2^{-2t-1}}{\|A_h^{-1}\|}\right)=\alpha(h)+\beta(h)+\frac{1}{1-q}n^{3/2}\frac{2^{-2t-1}}{\|A_h^{-1}\|}.\tag{11}$$

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
27 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, 151, № 3 (1963). [2] М. М. Лаврентьев, О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1963. [3] В. К. Иванов, Сибирск. матем. журн., 10, № 5 (1969). [4] Г. И. Марчук, С. А. Атанбаев, ДАН, 190, № 3 (1970). [5] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960. [6] J. H. Wilkinson, Rounding Errors in Algebraic Processes, London, 1963. [7] Ю. Е. Бояринцев, В. Г. Васильев, Сибирск. матем. журн., 10, № 3 (1969).