Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (147), 2024

Физика

УДК 539.3 EDN: TRQZUM

Изгиб упругопластической трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем в терморадиационном поле

А.С. Мельникова

В работе представлены результаты аналитического и численного решения задачи об изгибе упругопластической пластины при действии силовых и терморадиационных нагрузок. В качестве объекта исследования рассматривалась трехслойная прямоугольная пластина со сжимаемым заполнителем. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом заполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Равномерно распределенная нагрузка приложена к внешней поверхности первого несущего слоя. Тепловой и нейтронный потоки направлены перпендикулярно первому несущему слою.
Ключевые слова: трехслойная прямоугольная пластина, сжимаемый заполнитель, термоупругопластическая пластина, изгиб.

The paper presents the results of analytical and numerical solution of the problem of elastic-plastic plate bending under force and thermal-radiation loads. A three-layer rectangular plate with a compressible filler was considered as an object of study. Kinematic hypotheses are based on the broken line hypothesis: Kirchhoff's hypotheses are accepted for the outer layers, and the deformed normal remains rectilinear in a rigid compressible filler. A uniformly distributed load is applied to the outer surface of the first bearing layer. Thermal and neutron fluxes are directed perpendicular to the first bearing layer.
Keywords: three-layer rectangular plate, compressible filler, thermoelastoplastic plate, bending.

Введение. Сегодня известно множество слоистых конструкций, которые используются в различных отраслях экономики нашей страны. Слоистые конструкции состоят из нескольких слоев материалов с различными механическими свойствами. Под трехслойной конструкцией понимаем панель, состоящую из двух несущих слоев и заполнителя между ними. Трехслойные элементы за счет сочетания материалов с различными свойствами становятся способными сопротивляться различным внешним воздействиям и позволяют сократить расходы в период эксплуатации. Чтобы их применение было обосновано в каждом конкретном случае, необходимо разрабатывать новые либо уточнять уже существующие методы расчета таких конструкций.

В монографии [1] рассматривается деформирование трехслойных стержней в терморадиационных полях. Деформирование композитных пластин при действии нейтронного потока исследовано в работах [2]–[3]. В работе [4] рассмотрен изгиб упругой круговой несимметричной по толщине трехслойной пластины локальными равномерно распределенными по кругу нагрузками в нейтронном потоке. Изгиб круговой трехслойной пластины кольцевой нагрузкой в условиях нейтронного облучения рассмотрен в статье [5]. В [6] исследовано изменение нейтронного потока при прохождении через трехслойную пластину. В статьях [7]–[10] исследованы пластины при воздействии температуры. Влияние физических и механических свойств материалов слоистых тел на напряженное состояние рассматривалось в работе [11]. Колебания пластин и оболочек при действии различных нагрузок исследовано в [12]–[13]. Здесь выполнена постановка и решение задачи об изгибе упругопластической трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем в терморадиационном поле.

Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого заполнителя. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя.

Предположим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешняя распределенная нагрузка q, проекции которой на координатные оси: $q(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$, тепловой поток интенсивностью q_t, направленный перпендикулярно первому несущему слою, а также нейтронный поток. За искомые функции принимаем продольные перемещения $u_{kx}(x, y)$, $u_{ky}(x, y)$ и прогибы $w_k(x, y)$ срединных поверхностей несущих слоев $(k = 1, 2)$ (рисунок 1).

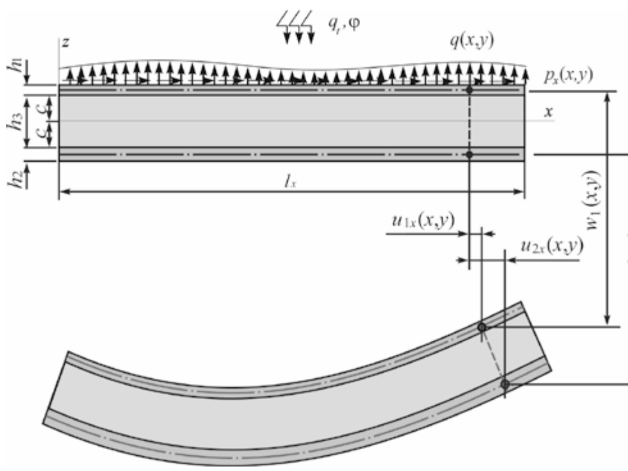

Рисунок 1 – Расчетная схема прямоугольной трехслойной пластины

При радиационном (нейтронном) воздействии на упругопластическое тело в функцию пластичности и объемную деформацию вносятся корректировки. Физические уравнения пластичности в радиационном поле принимают вид

$$s_{ij} = 2Gf_1(\varepsilon_u, I)\text{э}_{ij}, \qquad \sigma = K(3\varepsilon - BI).$$

Здесь $I = \varphi t$ – интегральный нейтронный поток, который в пределах малых упругопластических деформаций приводит к увеличению радиационного упрочнения материала и росту предела текучести. Радиационное увеличение объемной деформации учитывается величиной BI, где B – константа материала.

При одновременном воздействии теплового и нейтронного потоков уравнения терморадиационной пластичности принимают вид

$$s_{ij} = 2G(T)\,f_1(\varepsilon_u, T, I)\text{э}_{ij}, \qquad \sigma = K(3\varepsilon - 3\alpha\Delta T - BI).$$

Предположим, что упругопластическая пластина находится в температурном поле $T_k(z)$ и облучается нейтронным потоком $I = \varphi t$, где φ – интенсивность в нейтрон/с, t – время. Соответствующие физические уравнения состояния примут вид

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k\left(T_k\right)\left(1 - \omega^{(k)}\left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k, I\right)\right)\text{э}_{ij}^{(k)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k - BI) \quad (i, j = x, y, z,\ k = 1, 2, 3), \qquad (1)$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\text{э}_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации в k-м слое; $\omega^{(k)}\left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k, I\right)$ – функции пластичности Ильюшина в несущих слоях с учетом зависимости от величины нейтронного потока; $\omega^{(3)}\left(\varepsilon_u^{(3)}, T_k, I\right)$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя с учетом зависимости от величины нейтронного потока; $G_k(T_k)\,, K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материалов слоев; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения; ΔT_k – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0.

Радиационное облучение твердых тел сопровождается многочисленными эффектами, в результате которых в них возникает объемная деформация, изменяются упругие и особенно пластические характеристики вещества.

Исходя из соотношений (1), выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом «ω») слагаемые, которые будут включать терморадиационные добавки:

– в несущих слоях

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)0} = 2G_k(T_k)\text{э}_{xx}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k)\text{э}_{xx}^{(k)}\omega^{(k)} + 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k = \frac{2}{3}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{xx}^{(k)} - \varepsilon_{yy}^{(k)}\right)\omega^{(k)} + +3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k + BI,$$

$$\sigma_{yy}^{(k)} = \sigma_{yy}^{(k)0} - \sigma_{yy}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)0} = 2G_k(T_k)\text{э}_{yy}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k)\text{э}_{yy}^{(k)}\omega^{(k)} + 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k = \frac{2}{3}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)}\right)\omega^{(k)} +$$
$$+3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k + BI,$$

$$\sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{xy}^{(k)0} - \sigma_{xy}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xy}^{(k)0} = 2G_k(T_k)\text{э}_{xy}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xy}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k)\text{э}_{xy}^{(k)}\omega^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)}\omega^{(k)};$$

– в заполнителе

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\text{э}_{xx}^{(3)} + 3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3)\left(\varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)}\right),$$

$$\sigma_{xx}^{(3)\omega} = 2G_3(T_3)\text{э}_{xx}^{(3)}\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 =$$
$$= \frac{2}{3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI,$$

$$\sigma_{yy}^{(3)} = \sigma_{yy}^{(3)0} - \sigma_{yy}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{yy}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\text{э}_{yy}^{(3)} + 3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^-(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)},$$

$$\sigma_{yy}^{(3)\omega} = 2G_3(T_3)\text{э}_{yy}^{(3)}\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 =$$
$$= \frac{2}{3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI,$$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)0} - \sigma_{zz}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{zz}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\text{э}_{zz}^{(3)} + 3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^-(T_3)\left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}\right),$$

$$\sigma_{zz}^{(3)\omega} = 2G_3(T_3)\text{э}_{zz}^{(3)}\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 =$$
$$= \frac{2}{3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\omega^{(3)} + 3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI,$$

$$\sigma_{xy}^{(3)} = \sigma_{xy}^{(3)0} - \sigma_{xy}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xy}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\text{э}_{xy}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)},$$

$$\sigma_{xy}^{(3)\omega} = 2G_3(T_3)\text{э}_{xy}^{(3)}\omega^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}\omega^{(3)},$$

$$\sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)0} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\text{э}_{xz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)},$$

$$\sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3(T_3)\text{э}_{xz}^{(3)}\omega^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)}\omega^{(3)},$$

$$\sigma_{yz}^{(3)} = \sigma_{yz}^{(3)0} - \sigma_{yz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{yz}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\text{э}_{yz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)},$$

$$\sigma_{yz}^{(3)\omega} = 2G_3(T_3)Э_{yz}^{(3)}\omega^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}\omega^{(3)},$$

$$K_k^{+}(T_k) = K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k), \quad K_k^{-}(T_k) = K_k(T_k) - \frac{2}{3}G_k(T_k). \tag{2}$$

Аналогичные (2) действия проводим с внутренними и обобщенными усилиями. Система уравнений равновесия в усилиях примет вид:

$$H_{1x}^0 - V_1^0,_y - P_{1x}^0,_x = p_x + H_{1x}^\omega - V_1^\omega,_y - P_{1x}^\omega,_x,$$

$$H_{1x}^0 + V_2^0,_y + P_{2x}^0,_x = H_{1x}^\omega + V_2^\omega,_y + P_{2x}^\omega,_x,$$

$$H_{1y}^0 - V_1^0,_x - P_{1y}^0,_y = p_y + H_{1y}^\omega - V_1^\omega,_x - P_{1y}^\omega,_y,$$

$$H_{1y}^0 + V_2^0,_x + P_{2y}^0,_y = H_{1y}^\omega + V_2^\omega,_x + P_{2y}^\omega,_y,$$

$$S_{1x}^0,_{xx} + H_2^0 - T_{1x}^0,_x - U_1^0,_{xy} + S_{1y}^0,_{yy} - T_{1y}^0,_y =$$

$$= q + \frac{p_x,_x h_1}{2} + \frac{p_y,_y h_1}{2} + S_{1x}^\omega,_{xx} + H_2^\omega - T_{1x}^\omega,_x - U_1^\omega,_{xy} + S_{1y}^\omega,_{yy} - T_{1y}^\omega,_y,$$

$$S_{2x}^0,_{xx} - H_2^0 - T_{2x}^0,_x - U_2^0,_{xy} + S_{2y}^0,_{yy} - T_{2y}^0,_y =$$

$$= S_{2x}^\omega,_{xx} - H_2^\omega - T_{2x}^\omega,_x - U_2^\omega,_{xy} + S_{2y}^\omega,_{yy} - T_{2y}^\omega,_y. \tag{3}$$

Задача (3) замыкается добавлением силовых граничных условий, где при $x = 0, l_x$ должны выполняться требования:

$$P_{1x}^0 = N_{rx}^{(1)} + P_{1x}^t, \quad P_{2x}^0 = N_{rx}^{(2)} + P_{2x}^t, \quad V_1^0 = Q_{rxy}^{(1)}, \quad V_2^0 = Q_{rxy}^{(2)}, \quad T_{1x}^0 - S_{1x}^0,_x - U_1^0,_y = Q_{rx}^{(1)},$$

$$T_{2x}^0 - S_{2x}^0,_x - U_2^0,_y = Q_{rx}^{(1)}, \quad S_{1x}^0 = M_{rx}^{(1)} + S_{1x}^t, \quad S_{2x}^0 = M_{rx}^{(2)} + S_{2x}^t.$$

При $y = 0, l_y$

$$P_{1y}^0 = N_{sy}^{(1)} + P_{1y}^t, \quad P_{2y}^0 = N_{sy}^{(2)} + P_{2y}^t, \quad V_1^0 = Q_{sxy}^{(1)}, \quad V_2^0 = Q_{sxy}^{(2)}, \quad T_{1y}^0 - S_{1y}^0,_y = Q_{sy}^{(1)},$$

$$T_{2y}^0 - S_{2y}^0,_y = Q_{sy}^{(2)}, \quad S_{1y}^0 = M_{sy}^{(1)} + S_{1y}^t, \quad S_{2y}^0 = M_{sy}^{(2)} + S_{2y}^t, \quad U_1^0 = Q_{sxy}^{(1)}, \quad U_2^0 = Q_{sxy}^{(2)}. \tag{4}$$

Здесь $N_{rx}^{(p)}$, $Q_{rxy}^{(p)}$, $Q_{rx}^{(p)}$, $M_{rx}^{(p)}$, $N_{ly}^{(p)}$, $Q_{sxy}^{(p)}$, $Q_{sy}^{(p)}$, $M_{sy}^{(p)}$ – заданные усилия на торцах пластины, где индекс p соответствует номеру несущего слоя. Индекс r принимает значения $0, l_x$, индекс s – $0, l_y$, указывая, на какой стороне пластины задано усилие.

Подставим в уравнения равновесия (3) выражения линейных и нелинейных составляющих внутренних усилий через искомые функции u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}, w_1, w_2. Получим систему нелинейных дифференциальных уравнений, которая в итерационном виде примет вид:

$$a_1u_{1x}^n - a_1u_{2x}^n - a_4u_{1x}^n,_{xx} - a_5u_{2x}^n,_{xx} - a_{19}u_{1x}^n,_{yy} - a_{18}u_{2x}^n,_{yy} - a_{21}u_{1y}^n,_{xy} - a_{23}u_{2y}^n,_{xy} +$$

$$+ a_2w_1^n,_x + a_3w_2^n,_x - 2a_{24}w_1^n,_{xyy} + a_{25}w_2^n,_{xyy} - 2a_6w_1^n,_{xxx} + a_7w_2^n,_{xxx} = p_x + p_\omega^{n-1},$$

$$-a_1u_{1x}^n + a_1u_{2x}^n - a_5u_{1x}^n,_{xx} - a_9u_{2x}^n,_{xx} - a_{18}u_{1x}^n,_{yy} - a_{20}u_{2x}^n,_{yy} - a_{23}u_{1y}^n,_{xy} - a_{22}u_{2y}^n,_{xy} - a_{10}w_1^n,_x -$$

$$- a_{17}w_2^n,_x - a_{24}w_1^n,_{xyy} + 2a_{25}w_2^n,_{xyy} - a_6w_1^n,_{xxx} + 2a_7w_2^n,_{xxx} = s_\omega^{n-1},$$

$$a_1u_{1y}^n - a_1u_{2y}^n - a_4u_{1y}^n,_{yy} - a_5u_{2y}^n,_{yy} - a_{19}u_{1y}^n,_{xx} - a_{18}u_{2y}^n,_{xx} - a_{21}u_{1x}^n,_{xy} - a_{23}u_{2x}^n,_{xy} + a_2w_1^n,_y +$$

$$+ a_3w_2^n,_y - 2a_{24}w_1^n,_{xxy} + a_{25}w_2^n,_{xxy} - 2a_6w_1^n,_{yyy} + a_7w_2^n,_{yyy} = p_y + h_\omega^{n-1},$$

$$-a_1u_{1y}^n + a_1u_{2y}^n - a_5u_{1y}^n,_{yy} - a_9u_{2y}^n,_{yy} - a_{18}u_{1y}^n,_{xx} - a_{20}u_{2y}^n,_{xx} - a_{23}u_{1x}^n,_{xy} - a_{22}u_{2x}^n,_{xy} - a_{10}w_1^n,_y -$$

$$- a_{17}w_2^n,_y - a_{24}w_1^n,_{xxy} + 2a_{25}w_2^n,_{xxy} - a_6w_1^n,_{yyy} + 2a_7w_2^n,_{yyy} = r_\omega^{n-1},$$

$$-a_2u_{1x}^n,_x - a_2u_{1y}^n,_y + a_{10}u_{2x}^n,_x + a_{10}u_{2y}^n,_y + 2a_6u_{1x}^n,_{xxx} + a_6u_{2x}^n,_{xxx} + 2a_6u_{1y}^n,_{yyy} + a_6u_{2y}^n,_{yyy} +$$

$$+ 2a_{24}u_{1x}^n,_{xyy} + a_{24}u_{2x}^n,_{xyy} + 2a_{24}u_{1y}^n,_{xxy} + a_{24}u_{2y}^n,_{xxy} + a_{11}w_1^n,_{xx} + a_{11}w_1^n,_{yy} - a_{12}w_2^n,_{xx} -$$

$$- a_{12}w_2^n,_{yy} + a_{15}w_1^n,_{xxxx} + a_{15}w_1^n,_{yyyy} - a_{16}w_2^n,_{xxxx} - a_{16}w_2^n,_{yyyy} + a_{26}w_1^n,_{xxyy} - a_{28}w_2^n,_{xxyy} +$$

$$+ a_8w_1^n - a_8w_2^n = q + 0,5p_x,_x h_1 + 0,5p_y,_y h_1 + q_\omega^{n-1},$$

$$-a_3u^n_{1y},_y - a_3u^n_{1x},_x + a_{17}u^n_{2y},_y + a_{17}u^n_{2x},_x - a_7u^n_{1y},_{yyy} - a_7u^n_{1x},_{xxx} - 2a_7u^n_{2y},_{yyy} - 2a_7u^n_{2x},_{xxx} -$$
$$-2a_{27}u^n_{2y},_{xxy} - a_{25}u^n_{1y},_{xxy} - 2a_{25}u^n_{2x},_{xyy} - a_{25}u^n_{1x},_{xyy} - a_{12}w^n_1,_{xx} - a_{12}w^n_1,_{yy} + a_{14}w^n_2,_{xx} +$$
$$+a_{14}w^n_2,_{yy} - a_{16}w^n_1,_{xxxx} - a_{16}w^n_1,_{yyyy} + a_{13}w^n_2,_{xxxx} + a_{13}w^n_2,_{yyyy} - a_{28}w^n_1,_{xxyy} + a_{27}w^n_2,_{xxyy} -$$
$$-a_8w^n_1 + a_8w^n_2 = g^{n-1}_\omega. \tag{5}$$

Здесь n – номер приближения, коэффициенты $a_1, \ldots, a_{28}$ определяются по интегральным формулами, учитывающим изменение параметров упругости по толщине пакета; величины с индексом «ω» в правой части уравнения – нелинейные слагаемые, которые учитывают физическую нелинейность материалов слоев и уровень облучения. На первом шаге приближения нелинейные слагаемые принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущей итерации.

Применение сформулированного метода упругих решений в данном случае логично, так как позволяет сводить рассматриваемую задачу к соответствующей линейной задаче термоупругости с дополнительными нагрузками.

Принимаем кинематические условия свободного опирания рассматриваемой пластины по торцам $x = 0, l_x$ на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия в перемещениях при $x = 0,\ l_x$ имеют вид (k = 1,2):

$$u^n_{kx},_x = w^n_k = w^n_k,_{xx} = 0. \tag{6}$$

Систему дифференциальных уравнений (5) решаем методом Бубнова-Галеркина в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (6):

$$u_{kx} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U^n_{kxpm}\psi_{xpm}(x,y), \quad u_{ky} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U^n_{kypm}\psi_{ypm}(x,y),$$
$$w_k = \sum_{p,m=0}^{\infty} W^n_{kpm}\psi_{zpm}(x,y), \tag{7}$$

где U^n_{kxpm}, U^n_{kypm}, W^n_{kpm} – неизвестные амплитуды перемещений на n-м шаге, ($k = 1, 2$); $\psi_{xpm}, \psi_{ypm}, \psi_{zpm}$ – системы базисных ортогональных функций, которые удовлетворяют граничным условиям.

Внешние нагрузки

$$p^{n-1}_\omega = \sum_{p,m=0}^{\infty} p^{n-1}_{\omega pm}\psi_{xpm}(x,y), \quad s^{n-1}_\omega = \sum_{p,m=0}^{\infty} s^{n-1}_{\omega pm}\psi_{xpm}(x,y),$$
$$h^{n-1}_\omega = \sum_{p,m=0}^{\infty} h^{n-1}_{\omega pm}\psi_{ypm}(x,y),\ r^{n-1}_\omega = \sum_{p,m=0}^{\infty} r^{n-1}_{\omega pm}\psi_{ypm}(x,y),$$
$$q^{n-1}_\omega = \sum_{p,m=0}^{\infty} q^{n-1}_{\omega pm}\psi_{zpm}(x,y), \quad g^{n-1}_\omega = \sum_{p,m=0}^{\infty} g^{n-1}_{\omega pm}\psi_{zpm}(x,y),$$
$$q = \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{pm}\psi_{zpm}(x,y). \tag{8}$$

После подстановки перемещений (7), нагрузок и дополнительных усилий (8) в систему (5) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений U^n_{1xp}, U^n_{2xp}, W^n_{1p}, W^n_{2p}:

$$b_1U^n_{1xpm} + b_2U^n_{2xpm} + b_{11}U^n_{1ypm} + b_{12}U^n_{2ypm} + b_3W^n_{1pm} + b_4W^n_{2pm} = p^{n-1}_{\omega pm},$$
$$b_2U^n_{1xpm} + b_5U^n_{2xpm} + b_{12}U^n_{1ypm} + b_{13}U^n_{2ypm} + b_6W^n_{1pm} + b_7W^n_{2pm} = s^{n-1}_{\omega pm},$$
$$b_{11}U^n_{1xpm} + b_{12}U^n_{2xpm} + b_{14}U^n_{1ypm} + b_{15}U^n_{2ypm} + b_{16}W^n_{1pm} + b_{17}W^n_{2pm} = h^{n-1}_{\omega pm},$$
$$b_{12}U^n_{1xpm} + b_{13}U^n_{2xpm} + b_{15}U^n_{1ypm} + b_{18}U^n_{2ypm} + b_{19}W^n_{1pm} + b_{20}W^n_{2pm} = r^{n-1}_{\omega pm},$$

$$b_3U^n_{1xpm}+b_6U^n_{2xpm}+b_{16}U^n_{1ypm}+b_{19}U^n_{2ypm}+b_8W^n_{1pm}+b_9W^n_{2pm}=q_{pm}+q^{n-1}_{\omega pm},$$
$$b_4U^n_{1xpm}+b_7U^n_{2xpm}+b_{17}U^n_{1ypm}+b_{20}U^n_{2ypm}+b_9W^n_{1pm}+b_{10}W^n_{2pm}=g^{n-1}_{\omega pm}.$$

Коэффициенты b_i выражаются через величины a_i и зависят от параметров p и m.

Численный параметрический анализ. Численные расчеты проводились для пакета трехслойной пластины, состоящей из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, с толщинами слоев $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,4$ м. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью $q = -2$ МПа, размеры пластины $l_x = 1$ м, $l_y = 1$ м. Граничные условия – свободное опирание на жесткие неподвижные опоры. Воздействие нейтронного облучения моделировалось увеличением предела текучести первого слоя на 15 %, предела физической нелинейности заполнителя – на 10 %.

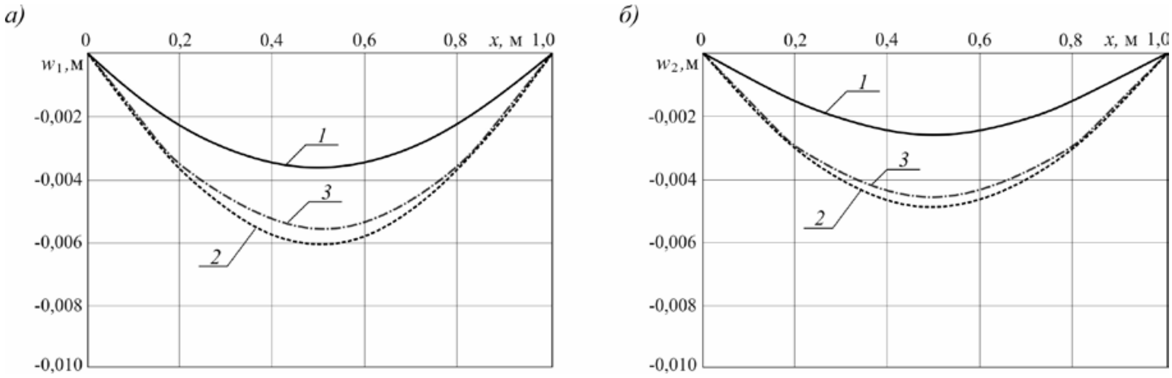

Рисунок 2 – Прогибы первого (*а*) и второго (*б*) несущих слоев упругопластической пластины: 1 – упругопластическая (Т = 343 К), 2 – термоупругопластическая (Т = 343 К), 3 – термоупругопластическая (Т = 343 К) в нейтронном поле

Рассмотрим влияние температуры и нейтронного поля на прогибы несущих слоев, которые представлены на рисунке 2. Можно отметить, что температурное воздействие на пластину приводит к увеличению максимальных прогибов обоих несущих слоев. Это объясняется тепловым объемным деформированием, а также уменьшением модулей упругости материалов. Влияние нейтронного облучения на термоупругопластические прогибы незначительно. Прогибы уменьшаются на 7 % за счет ослабления пластических свойств материала и увеличения его жесткости.

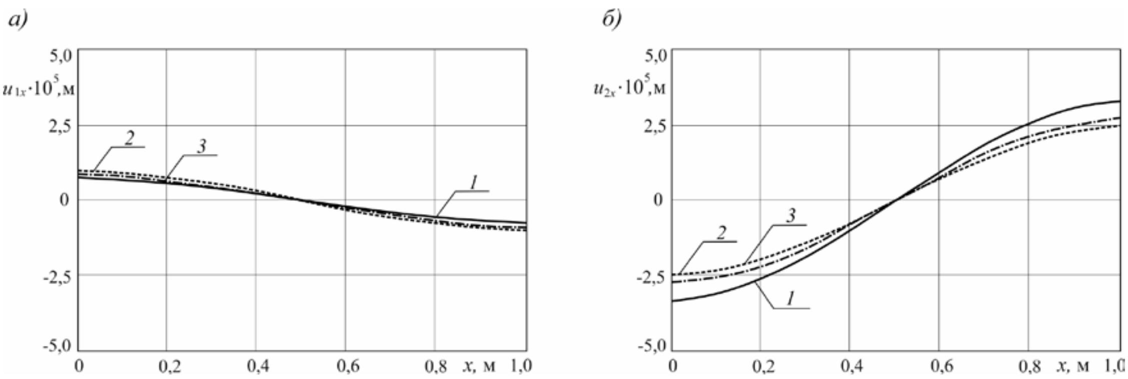

Рисунок 3 – Продольные перемещения первого (*а*) и второго (*б*) несущих слоев упругопластической пластины: 1 – упругопластическая (Т = 343 К), 2 – термоупругопластическая (Т = 343 К), 3 – термоупругопластическая (Т = 343 К) в нейтронном поле

На рисунке 3 показаны продольные перемещения первого (*а*) и второго (*б*) несущих слоев. Нумерация кривых прежняя. Температурное воздействие увеличивает упругопластические перемещения во втором несущем слое на 25–35 %, а в первом несущем слое они практически не изменяются, что объясняется разницей в толщинах несущих слоев. Продольные перемещения при воздействии нейтронного облучения меняются незначительно в обоих несущих слоях.

Заключение. Полученное в работе решение можно использовать для исследования деформирования прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем в терморадиационном поле. Численное решение показало, что предварительное облучение незначительно сказывается на изгибе и продольных перемещениях в несущих слоях пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект №Т24РМ-004).

Литература

1. Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.

2. Starovoitov, E. I. Deformation of a three-layer rod with a compressible core in a neutron flow / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2020. – Vol. 56, № 1. – P. 81–91.

3. Vakhneev, S. Damping of circular composite viscoelastic plate vibration under neutron irradiation / S. Vakhneev, E. Starovoitov // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18, iss. 4. – P. 699–704.

4. Старовойтов, Э. И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины в нейтронном потоке локальной нагрузкой / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. : Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22, № 3. – С. 360–375.

5. Плескачевский, Ю. М. Изгиб трехслойной круговой пластины кольцевой нагрузкой в нейтронном потоке / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Актуальные вопросы машиноведения. – 2023. – Т. 12. – С. 47–51.

6. Старовойтов, Э. И. Изменение нейтронного потока при прохождении через трехслойную пластину / Э. И. Старовойтов // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – № 13. – С. 141–146.

7. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

8. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение упругопластической трехслойной пластины / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, А. В. Нестерович // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 3. – С. 42–52.

9. Козел, А. Г. Термоупругопластический изгиб трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15. – С. 100–108.

10. Зеленая, А. С. Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 98–104.

11. Можаровский, В. В. Исследование особенностей распределения полей напряжений в многослойных покрытиях / В. В. Можаровский, Н. А. Марьина // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 34–43.

12. Bakulin, V. N. Parametric resonance of a three-layered cylindrical composite rib-stiffened shell / V. N. Bakulin, D. A. Boitsova, A. Ya. Nedbai // Mechanics of Composite Materials. – 2021. – Vol. 57, № 5. – P. 623–634.

13. Леоненко, Д. В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступила в редакцию 26.08.2024