*Проблемы физики, математики и техники*, № 2 (39), 2019
**МАТЕМАТИКА**

УДК 517.977

# КРИТЕРИИ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВЫХОДУ

**О.Б. Цехан**

*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы*

# COMPLETE CONTROLLABILITY CONDITIONS FOR LINEAR TIME-INDEPENDENT SYSTEM WITH DELAY IN OUTPUT

**V.B. Tsekhan**

*Yanka Kupala State University of Grodno*

Выполнено строгое обоснование и развитие на линейные стационарные системы с запаздыванием в уравнении состояния и в выходе одного подхода к получению условий полной наблюдаемости систем с запаздыванием. Подход основан на сведении задачи полной наблюдаемости системы с запаздыванием к проблеме единственности решения специальной однородной граничной задачи для системы дифференциальных уравнений без запаздывания в расширенном пространстве состояний. Доказаны необходимые и достаточные условия полной наблюдаемости, полной идентифицируемости в смысле однозначного восстановления по известной выходной функции ненаблюдаемого куска траектории на отрезке времени длиной запаздывания. Условия имеют ранговый тип и выражены в терминах матриц исходной системы наблюдения.

***Ключевые слова***: *полная наблюдаемость*, *полная идентифицируемость*, *запаздывание*, *выход*, *критерий.*

Strict justification and extension to the linear stationary system with delay in the equation of state and in the output of one approach to reception of complete observability conditions for systems with delay is executed. The approach is based on the reduction of the problem of complete observability of the system with delay to the problem of uniqueness of the solution of a special homogeneous boundary value problem for a system of differential equations without delay in the extended state space. The necessary and sufficient conditions for complete observability, complete identifiability are proved. Complete observability, identifiability in the sense of unambiguous reconstruction of an unobservable piece of the trajectory on the time period of the delay length by the known output function are proved. The conditions are of rank type and are expressed in terms of matrices of the original observation system.

***Keywords***: *complete observability*, *complete identifiability*, *time delay*, *output*, *criterion.*

## 1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h),\ t \in [0, t_1], \tag{1.1}$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0], \tag{1.2}$$

и ее выход с запаздыванием в состоянии

$$y(t) = Cx(t) + C_1x(t-h),\ t \in [0, t_1]. \tag{1.3}$$

Здесь $x \in R^n$, $y \in R^m$, $m \le n$; $A, A_1, C, C_1$ – постоянные матрицы соответствующих размеров, $0 < h$ – постоянное запаздывание; $\varphi(t)$ – неизвестная кусочно-непрерывная справа начальная $n$-вектор-функция, $y(t)$, $t \in [0, t_1]$ – известная $m$-вектор функция.

Системы вида (1.1)–(1.3) возникают, например, при исследовании линейных стационарных сингулярно возмущенных систем методом расщепляющего преобразования [1].

Решение системы (1.1), (1.2) – непрерывная для $t > 0$ функция, сглаживающаяся с течением времени: на интервале $[jh, (j+1)h]$, $j = 0, 1, 2, ...$ решение является $j$ раз непрерывно дифференцируемой и $j+1$ раз кусочно-непрерывно дифференцируемой справа функцией.

***Определение*** **1.1.** Кусок траектории $x_t \triangleq \{x(\theta); \theta \in [t-h, t]\}$ назовем *состоянием системы* (1.1) *в момент времени t.*

***Определение*** **1.2.** Система (1.1)–(1.3) называется *полностью наблюдаемой* (*наблюдаемой по конечному состоянию*), если для любого выхода (1.3) состояние $x_h$ ($x_{t_1}$) системы (1.1), совместимое в силу (1.3) с этим выходом, можно восстановить однозначно.

Задачу наблюдения по конечному состоянию называют также [2, с. 65] задачей *полной идентификации*. В настоящей работе будем придерживаться этой терминологии.

Полная наблюдаемость (в смысле определения 1.2) наряду со стабилизируемостью гарантирует [3], например, асимптотическую устойчивость оптимального фильтра для систем типа (1.1)–(1.3). Полная идентифицируемость важна при построении управлений по типу обратной связи.

***Задача***. Определить условия на параметры системы (1.1), (1.3), при которых эта система полностью наблюдаема (полностью идентифицируема).

***Замечание* 1.1.** Полная идентифицируемость системы (1.1), (1.3) следует из ее полной наблюдаемости. Обратное, вообще говоря, не верно, что подтверждает пример (5.1), (5.3), рассмотренный в разделе 5.

Спектральные условия полной идентифицируемости систем типа (1.1)–(1.3) были получены ранее Lee E.B., Olbrot A. в [4], условия полной наблюдаемости (в смысле однозначного восстановления начального условия (1.2)) для системы (1.1)–(1.3) при необходимом условии $\det A_1 \neq 0$ получены Минюком С.А., Метельским А.В. в [5]. Критерии полной наблюдаемости, полной идентифицируемости системы (1.1)–(1.3) при $\det A_1 = 0,\ C_1 = 0_{m\times n}$ доказаны в [6].

Основная цель данной статьи – доказательство эффективных параметрических критериев полной наблюдаемости, полной идентифицируемости (в смысле определения 1.2) системы (1.1)–(1.3) в случае $\det A_1 = 0,\ C_1 \neq 0_{m\times n}$. Условия справедливы также и в случае $\det A_1 \neq 0$ и/или $C_1 = 0_{m\times n}$.

***Замечание* 1.2.** Согласно определению 1.2 система (1.1)–(1.3) полностью наблюдаема (полностью идентифицируема) тогда и только тогда, когда существует взаимно-однозначное соответствие между множеством состояний $x_h\ (x_{t_1})$ системы (1.1) и множеством выходов (1.3). Для того чтобы это было возможно, необходимо и достаточно, чтобы для тривиального выхода $y(t) \equiv 0,\ t \in [0, t_1]$, было возможно восстановить только тривиальное состояние $x_h\ (x_{t_1})$, что непосредственно вытекает из линейности объекта наблюдения (1.1)–(1.3).

## 2 Преобразование задачи

***Утверждение* 2.1.** *Система* (1.1)–(1.3) *полностью наблюдаема* (*полностью идентифицируема*) *на отрезке* $T = [0, t_1]$ *тогда и только тогда, когда она сохранят это свойство при* $t_1 = nh$.

Доказательство утверждения 2.1 при $C_1 \neq 0_{m\times n}$ несложно выполнить аналогично [5, с. 628], где доказана справедливость утверждения 2.1 для случая $C_1 = 0_{m\times n}$.

Из утверждения 2.1 следует, что без потери общности можно рассматривать случай $t_1 = nh$.

Для решения поставленной выше задачи используем подход, основанный на преобразовании системы (1.1)–(1.3) с запаздыванием к системе без запаздывания в некотором расширенном фазовом пространстве и сведении задачи полной наблюдаемости системы (1.1)–(1.3) к проблеме единственности решения однородной граничной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ранее такой подход применен без детального доказательства для систем без запаздываний в выходе в [6].

Процедура сведения основана на идеях метода шагов решения дифференциального уравнения с запаздыванием, при котором решение дифференциального уравнения с запаздыванием заменяется решением серии дифференциальных уравнений без запаздываний.

Пусть $x(t),\ t \in [0, nh]$ – произвольное решение задачи (1.1), (1.2), $y(t),\ t \in [0, nh]$ – соответствующая ему выходная функция (1.3). Обозначим

$$\begin{gathered} x_i(t) = x(t-(i-1)h), \\ i = \overline{1,n},\ t \in T_n \triangleq [(n-1)h,\ nh]. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Функции $x_i(t),\ i = \overline{1,n}$ (2.1) удовлетворяют системе

$$\begin{gathered} \dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + A_1x_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = Ax_{n-1}(t) + A_1x_n(t), \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\dot{x}_n(t) = Ax_n(t) + A_1\varphi(t-nh), \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} Cx_1(t) + C_1x_2(t) = y(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Cx_{n-1}(t) + C_1x_n(t) = y(t-(n-2)h), \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$Cx_n(t) + C_1\varphi(t-nh) = y(t-(n-1)h),\ t \in T_n. \tag{2.5}$$

Принимая во внимание условие непрерывности $x(t-0) = x(t+0),\ t > 0$, решения задачи (1.1)–(1.2), имеем следующие граничные условия для системы (2.2)–(2.3):

$$x_i((n-1)h) = x_{i+1}(nh),\ i = \overline{1, n-1}. \tag{2.6}$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.2) для системы с запаздыванием относительно непрерывной на $[0, nh]$ $n$-вектор-функции $x(t)$ равносильна граничной задаче (2.2)–(2.3), (2.6) для системы без запаздывания относительно $n^2$-вектор-функции $col\{x_i(t),\ i = \overline{1,n}\}$, а выход (1.3) представим в виде (2.4)–(2.5). Относительно системы (2.2)–(2.3), (2.6) это представление доказано в [7, с. 16].

Из построения системы (2.2)–(2.6) следует

***Утверждение* 2.2.** *Множество решений системы* (1.1)–(1.2) *вместе с соответствующими им выходами* (1.3) *взаимно-однозначно соответствует множеству решений граничной задачи* (2.2)–(2.6).

Т. к. решение системы с запаздыванием (1.1), (1.2) с течением времени сглаживается, то из (2.2), (2.6) вытекают граничные условия, которым также удовлетворяют $(n-i)$ раз непрерывно дифференцируемые и $(n+1-i)$ раз кусочно-непрерывно дифференцируемые вектор-функции $x_i(t),\ i = \overline{1,n}$,

$$\begin{gathered} x_i^{(k+1)}(nh) = Ax_i^{(k)}(nh) + A_1x_i^{(k)}((n-1)h), \\ k = \overline{0, n-i+1},\ i = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

***Замечание.*** Так как решение системы с запаздыванием сглаживается с течением времени, то условия (2.7) будут верны также не только для $t = nh$, но и для $t = lh, l > n$.

***Утверждение 2.3.*** *Множество решений граничной задачи* (2.2)–(2.6) *совпадает со множеством решений задачи* (2.2)–(2.5), (2.7).

Поскольку начальное состояние (1.2) неизвестно, а значит, не может использоваться при восстановлении по наблюдаемой функции (1.3) состояния системы (1.1)–(1.2), то, используя равенства (2.3), (2.5), связывающие $\varphi$ с $x$ и $y$, исключим из (2.2), (2.4) неизвестную начальную функцию $\varphi(t-nh)$, $t \in T_n$, без потери содержащейся в (2.2), (2.4) информации об $x_n(t)$. Для этого определим матрицы: $S \in R^{n\times n}$ – левый делитель нуля максимального ранга матрицы $A_1$ : и $\sigma \in R^{m\times m}$ – левый делитель нуля максимального ранга матрицы $C_1$ [8]:

$$SA_1 = 0_{n\times n},\ \ \sigma C_1 = 0_{m\times n}. \qquad (2.8)$$

Примем, что $S = 0$, если $\det A_1 \neq 0$ и $\sigma = 0$, если $rank\ C_1 = m$. Умножая слева (2.3) на $S$ и (2.5) на $\sigma$, получим

$$S\dot{x}_n(t) = SAx_n(t), \qquad (2.9)$$

$$\sigma Cx_n(t) = \sigma y(t-(n-1)h), t \in T_n. \qquad (2.10)$$

***Утверждение 2.4.*** *При известном* $y(t)$, $t \in [0, t_1]$, *и неизвестном* $\varphi(t), t \in [-h, 0]$, *задача однозначного восстановления состояния* $x_h$ $(x_{t_1})$ *системы* (1.1), (1.2) *по выходу* (1.3) *равносильна задаче однозначной разрешимости однородной граничной задачи* (2.2), (2.4), (2.7), (2.9), (2.10) *относительно* $x_n(t)$ $(x_1(t))$, $t \in T_n$.

Используя следующие обозначения

$$L(\lambda) \triangleq \begin{bmatrix} \lambda E_n - A & -A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda E_n - A & -A_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda E_n - A & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda S - SA \\ C & C_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma C \end{bmatrix} \in$$

$$\in \mathbb{R}^{n(n+m)\times n^2},$$

где $E_n$ – единичная $n \times n$ -матрица,

$$z(t) \triangleq col[x_i(t), i = \overline{1,n}] \triangleq$$
$$\triangleq col[x(t-(i-1)h), i = \overline{1,n}] \in \mathbb{R}^{n^2}, \qquad (2.11)$$

$$w(t) \triangleq col[\underbrace{0,\dots 0}_{n^2}, y(t-ih), i = \overline{0, n-2},$$

$$\sigma y(t-(n-1)h)] \in \mathbb{R}^{(m+n)n}, t \in T_n,$$

перепишем систему (2.2), (2.9), (2.4), (2.10) в виде

$$L(p)z(t) = w(t),\ t \in T_n. \qquad (2.12)$$

Таким образом, задача однозначного восстановления состояния $x_h$ $(x_{t_1})$ системы (1.1) при неизвестном начальном условии (1.2) по известному выходу (1.3) равносильна задаче однозначной разрешимости однородной граничной задачи (2.7), (2.12) относительно $x_n(t)$ $(x_1(t))$, $t \in T_n$, откуда с учетом замечания 1.2 имеем.

***Утверждение 2.5.*** *Система* (1.1)–(1.3) *полностью наблюдаема* (*полностью идентифицируема*) *тогда и только тогда*, *когда для однородной граничной задачи* (2.7), (2.12), $w(t) \equiv 0$, $t \in T_n$, *возможно только* $x_n(t) \equiv 0$ $(x_1(t) \equiv 0)$, $t \in T_n$.

***Утверждение 2.6.*** *Условие* $x_n(t) \equiv 0, t \in T_n$, *эквивалентно условию* $z(t) \equiv 0, t \in T_n$.

*Доказательство.* Во-первых, очевидно из конструкции (2.11), что справедливо $z(t) \equiv 0 \Rightarrow \Rightarrow x_n(t) \equiv 0$, $t \in T_n$. Покажем, что верно также $x_n(t) \equiv 0 \Rightarrow z(t) \equiv 0$, $t \in T_n$. Действительно, если $x_n(t) \equiv 0$, $t \in T_n$, то из (2.2) получим дифференциальное уравнение без запаздывания для нахождения $x_{n-1}(t)$:

$$\dot{x}_{n-1}(t) = Ax_{n-1}(t), t \in T_n, \qquad (2.13)$$

а из (2.6) имеем следующее начальное условие

$$x_{n-1}((n-1)h) = x_n(nh) = 0. \qquad (2.14)$$

Решая (2.13), (2.14), получаем $x_{n-1}(t) \equiv 0$, $t \in T_n$. Повторяя аналогично для $i = n-2$, $n-3, \dots, 1$, окончательно имеем $x_i(t) \equiv 0, t \in T_n$, $i = \overline{1,n}$, что в соответствии с обозначением (2.11) доказывает утверждение 2.6. □

**3 Полная наблюдаемость системы**

Пусть $\lambda_i, i = \overline{1,\nu}$, различные корни наибольшего общего делителя миноров порядка $n^2$ матрицы $L(\lambda)$ наибольшей кратности $\varepsilon$. Напомним, что под рангом полиномиальной матрицы понимается наибольший порядок тождественно отличного от нуля минора этой матрицы.

Обозначим $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел.

***Теорема 3.1.*** *Система* (1.1)–(1.3) *полностью наблюдаема тогда и только тогда*, *когда имеют место следующие условия*:

1) $rank\ L(\lambda) = n^2$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, (3.1)

2) $rank \begin{bmatrix} \lambda_i E_n - A - A_1 e^{-\lambda_i h} \\ C + C_1 e^{-\lambda_i h} \end{bmatrix} = n$ (3.2)

*всякий раз*, *когда* $rank\ L(\lambda_i) < n^2$.

*Доказательство. Необходимость.* Прежде всего, заметим, что условие (3.1) необходимо для того, чтобы система (2.7), (2.12) в которой $w(t) \equiv 0, t \in T_h$, имела только тривиальное решение относительно $x_n(t), t \in T_n$ (а именно, чтобы решение не зависело от произвольных функций). Это следует из утверждений 2.4 и 2.6 и [9].

Пусть теперь $\lambda_{i_0}$ таково, что $rank\ L(\lambda_{i_0}) < n^2$ и предположим, что для этого $\lambda_{i_0}$ условие (3.2) не выполнено, т. е.

$$rank \begin{bmatrix} C + C_1 e^{-\lambda_{i_0} h} \\ \lambda_{i_0} E_n - A - A_1 e^{-\lambda_{i_0} h} \end{bmatrix} < n.$$

Тогда существует постоянный $n$-вектор $l_0$ такой, что

$$\left[C + C_1 e^{-\lambda_{i_0} h}\right] l_0 = 0, \qquad (3.3)$$

$$[\lambda_{i_0} E_n - A - A_1 e^{-\lambda_{i_0} h}] l_0 = 0. \qquad (3.4)$$

Покажем, что тогда в качестве нетривиального решения однородной граничной задачи (2.7), (2.12), $w(t) \equiv 0, t \in T_h$, можно рассматривать $n^2$-вектор $\tilde{z}(t)$ (2.11), где в качестве компоненты $\tilde{x}_n(t)$ взята действительная функция $\operatorname{Re} \tilde{x}(t)$ или $\operatorname{Im} \tilde{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t) = l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(n-1)h)}, t \in T_n. \qquad (3.5)$$

Действительно, составим вектор $\tilde{z}(t)$ (2.11) из компоненты (3.5) и

$$\tilde{x}_i(t) = l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(i-1)h)}, t \in T_h, i = \overline{1,n}. \qquad (3.6)$$

Во-первых, функция (3.5) удовлетворяет граничному условию (2.7), $i = n$. Действительно, подставляя (3.5) в (2.7), $i = n$, имеем

$$\lambda_{i_0}^k [\lambda_{i_0} E_n - A - A_1 e^{-\lambda_{i_0} h}] l_0 e^{\lambda_{i_0} h} = 0, \ k = 0,1,$$

что справедливо ввиду справедливости равенства (3.4).

Во-вторых, функция (3.5) удовлетворяет также уравнению (2.12), $w(t) \equiv 0$. Для доказательства этого рассмотрим (2.12) в виде (2.2), (2.9), (2.4), (2.10). Во-первых, подставляя (3.5) в (2.9), получаем равенство

$$S\left(\lambda_{i_0} E_n - A\right) l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(n-1)h)} = 0,$$

справедливость которого вытекает из (3.4) с учетом $SA_1 = 0_{n\times n}$.

Далее проверим для (3.6) выполнение равенств (2.2), связывающих $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_{i-1}$ для $i = \overline{2,n}$. Подставляя (3.6) в (2.2), получаем:

$$\left(\lambda_{i_0} E_n - A + A_1 e^{-\lambda_{i_0} h}\right) l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(i-1)h)} = 0, \ i = \overline{2,n},$$

что справедливо в силу (3.4). Таким образом, (2.2) для (3.5) также справедливо.

Учитывая (3.3), несложно также убедиться, что для (3.6) справедливо (2.4) при $y(t) \equiv 0$.

Наконец, заметим, что так как верно (3.3), а также $\sigma C_1 = 0_{m\times m}$, то $\sigma C \tilde{x}_n(t) = \sigma C l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(n-1)h)} = 0$ также верно. Таким образом, (2.10) для (3.6) при $y(t) \equiv 0$ также справедливо.

Окончательно получаем, что вектор $\tilde{z}(t)$, определенный в виде (3.5), (3.6), можно рассматривать в качестве нетривиального решения однородной граничной задачи (2.7), (2.12), $w(t) \equiv 0, t \in T_h$. С учетом утверждения 2.6 это противоречит наблюдаемости и доказывает необходимость (3.2).

*Достаточность*. В силу утверждения 2.1 можно считать, что $t_1 = \max(nh, 1 + \varepsilon(\nu + 1))$. Обозначим $N \triangleq \max(n, 1 + \varepsilon(\nu + 1))$, $T_N \triangleq [(N-1)h, Nh]$ и будем рассматривать систему (2.12) для $t \in T_N$.

Пусть выполнено (3.1), (3.2). Покажем, что тогда из $y(t) \equiv 0, t \in T$ следует, что в решении однородной граничной задачи (2.12), (2.7) компонента $x_N(t) \equiv 0, t \in T_N$.

С этой целью построим решение задачи (2.12), $w(t) \equiv 0$, $t \in T_N$, (2.7).

Если $rank\ L(\lambda) = n^2\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$, т. е. $\nu = 0$, то из [9] вытекает, что $z(t) \equiv 0, t \in [(N-1)h, Nh]$ – единственное решение системы $L(p)z(t) = 0$, т. е. система (1.1)–(1.3) – полностью наблюдаема.

Пусть $\nu \neq 0$. Тогда любое решение уравнения $L(p)z(t) = 0$ имеет вид [10]

$$z(t) = \sum_{j=1}^{\nu} l_j(t) e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^{\nu} \begin{bmatrix} l_{j1}(t) \\ l_{j2}(t) \\ \vdots \\ l_{jn}(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_j t}, \qquad (3.7)$$

где $l_{jk}(t) \in \mathbb{R}^n$, $k = \overline{1,n}$, – векторные полиномы степени не выше $\varepsilon - 1$.

Найдем компоненту $x_1(t), t \in T_N$. Для нахождения коэффициентов полиномов $l_{j1}(t)$, $j = \overline{1,\nu}$, подставим представление $x_1(t) = \sum_{j=1}^{\nu} l_{j1}(t) e^{\lambda_j t}$ в граничные условия (2.7). В результате получаем, что искомые коэффициенты удовлетворяют системе

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{\nu} \left[ \left( \sum_{i=0}^{m} C_m^i l_{j1}^{(m-i)}(Nh) \lambda_j^i \right) e^{\lambda_j Nh} - \right. \\ - A \left( \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i l_{j1}^{(m-i-1)}(Nh) \lambda_j^i \right) e^{\lambda_j Nh} - \\ \left. - A_1 \left( \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i l_{j1}^{(m-i-1)}(N-1)h \lambda_j^i \right) e^{\lambda_j (N-1)h} \right] = 0, \\ m = \overline{1, \varepsilon(\nu+1)}. \end{gathered} \qquad (3.8)$$

Здесь $C_m^i = \dfrac{m!}{i!(m-i)!}$. Далее используем свойство коэффициентов $C_m^i = C_{m-1}^{i-1} + C_{m-1}^i$.

Обозначим

$$l_{j1(m)} = l_{j1}^{(m)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} + l_{j1}^{(m-1)}(Nh)\lambda_j e^{\lambda_j Nh} - \\ -Al_{j1}^{(m-1)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} - \\ -A_1 l_{j1}^{(m-1)}((N-1)h)e^{\lambda_j(N-1)h}, \quad (3.9) \\ j=\overline{1,\nu},\ m=\overline{1,\varepsilon}.$$

Тогда (3.8) можно записать в виде

$$B(\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_\nu)\times\begin{bmatrix} l_{j1(m)} \\ m=\overline{1,\varepsilon} \\ j=\overline{1,\nu}\end{bmatrix}=0, \qquad (3.10)$$

где

$$B(\lambda_1,...,\lambda_\nu) \triangleq$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} E_n & 0_n & \dots & 0_n & \dots & E_n & \dots & 0_n \\ \lambda_1 E_n & E_n & \dots & 0_n & \dots & \lambda_\nu E_n & \dots & 0_n \\ \lambda_1^2 E_n & C_2^1\lambda_1 E_n & \dots & 0_n & \dots & \lambda_\nu^2 E_n & \dots & 0_n \\ \lambda_1^3 E_n & C_3^2\lambda_1^2 E_n & \dots & 0_n & \dots & \lambda_\nu^3 E_n & \dots & 0_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{\varepsilon+1}E_n & C_{\varepsilon+1}^{\varepsilon}\lambda_1^{\varepsilon}E_n & \dots & C_{\varepsilon+1}^2\lambda_1^2 E_n & \dots & \lambda_\nu^{\varepsilon+1}E_n & \dots & C_{\varepsilon+1}^2\lambda_\nu^2 E_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\in \mathbb{R}^{\varepsilon(\nu+1)n\times\varepsilon\nu n}.$$

Матрица $B(\lambda_1,...,\lambda_\nu)$ имеет структуру матрицы $M$ из [5, с. 630], где доказано, что если $\lambda_i,\ i=\overline{1,\nu}$, различны, то $rank\, M = \varepsilon\nu n$. Так как $B(\lambda_1,...,\lambda_\nu)$ – матрица полного ранга по столбцам, то условие (3.10) равносильно совокупности равенств

$$l_{j1(m)}=0,\ m=\overline{1,\varepsilon},\ j=\overline{1,\nu}.$$

Отсюда, согласно (3.9) получаем, что для функциональных коэффициентов $l_{j1}(t),\ j=\overline{1,\nu}$, верны равенства

$$l_{j1}^{(m)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} + l_{j1}^{(m-1)}(Nh)\lambda_j e^{\lambda_j Nh} - \\ -Al_{j1}^{(m-1)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} - \\ -A_1 l_{j1}^{(m-1)}((N-1)h)e^{\lambda_j(N-1)h}=0, \quad (3.11) \\ j=\overline{1,\nu},\ m=\overline{1,\varepsilon}.$$

Покажем теперь, что при выполнении (3.2) верно $x_1(t)\equiv 0,\ t\in T_N$, если $y(t)\equiv 0,\ t\in T$. Для этого согласно (2.11), (3.7) достаточно показать, что $l_{j1}(t)\equiv 0,\ j=\overline{1,\nu}$.

Действительно, поскольку $l_{j1}(t)$ – полином степени не выше $\varepsilon-1$, то $l_{j1}^{(\varepsilon)}(t)\equiv 0,\ t\in T_N$, откуда имеем $l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(t)\equiv const,\ t\in T_N$, а значит, верно

$$l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh)=l_{j1}^{(\varepsilon-1)}((N-1)h). \qquad (3.12)$$

Рассмотрим (3.11) при $m=\varepsilon$:

$$\left[l_{j1}^{(\varepsilon)}(Nh)+l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh)\lambda_j - Al_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh)-\right. \\ \left.-A_1 l_{j1}^{(\varepsilon-1)}((N-1)h)e^{-\lambda_j h}\right]e^{\lambda_j Nh}=0,\ j=\overline{1,\nu}.$$

Отсюда с учетом $l_{j1}^{(\varepsilon)}(t)\equiv 0,\ t\in T_N$ и (3.12) имеем:

$$\left[\lambda_j - A - A_1 e^{-\lambda_j h}\right]l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh)e^{\lambda_j Nh}=0, \quad (3.13) \\ j=\overline{1,\nu}.$$

Кроме того, поскольку рассматривается $y(t)\equiv 0$, $t\in T$, то для $x_1(t)$ верно

$$y(t)=C\sum_{j=1}^{\nu}l_{j1}(t)e^{\lambda_j t}+C_1\sum_{j=1}^{\nu}l_{j1}(t-h)e^{\lambda_j(t-h)}= \\ =\sum_{j=1}^{\nu}\left[Cl_{j1}(t)+C_1 l_{j1}(t-h)e^{-\lambda_j t}\right]e^{\lambda_j t}\equiv 0.$$

Так как при разных $\lambda_j,\ j=\overline{1,\nu}$, функции $e^{\lambda_j t}$ линейно-независимы, то из последнего тождества вытекает

$$Cl_{j1}^{(m)}(t)+C_1 l_{j1}^{(m)}(t-h)e^{-\lambda_j t}\equiv 0, \\ j=\overline{1,\nu},\quad m=\overline{0,\varepsilon-1}.$$

Тогда из (3.12) и (3.13) при $t=Nh$ получаем:

$$\begin{bmatrix}\lambda_j - A - A_1 e^{-\lambda_j h} \\ C+C_1 e^{-\lambda_j h}\end{bmatrix}l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh)e^{\lambda_j Nh}=0,\ j=\overline{1,\nu},$$

откуда с учетом справедливости (3.2) имеем $l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh)=0$, а с учетом $l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(t)\equiv const,\ t\in T_N$ получаем $l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(t)\equiv 0,\ j=\overline{1,\nu}$.

Повторяя рассуждения аналогично для $l_{j1}^{(i)}(t),\ i=\varepsilon-2,\varepsilon-3,...0$, докажем, что $l_{j1}(t)\equiv 0$, $j=\overline{1,\nu}$. Таким образом, доказано, что

$$x_1(t)=\sum_{j=1}^{\nu}l_{j1}(t)e^{\lambda_j t}\equiv 0,\ t\in T_N. \qquad (3.14)$$

Покажем теперь, что если выполнено (3.1), то и $x_2(t)\equiv 0,\ t\in T_N$. Из первого уравнения (2.2) и первого уравнения (2.4) с учетом (3.14) имеем

$$A_1 x_2(t)=0, \\ C_1 x_2(t)=0. \qquad (3.15)$$

Кроме того, для любого $k, k=\overline{1,N}$, «кусок траектории» $x_k(t),\ t\in T_N$, системы наблюдения (1.1)–(1.3) с $y(t)\equiv 0,\ t\in[0,t_1]$, удовлетворяет системе

$$S\dot{x}_k(t)=SAx_k(t), \\ \sigma Cx_k(t)=0,\quad t\in T_N.$$

Объединяя последние равенства для $x_2(t)$, $t\in T_N$, с (3.16), получаем

$$\begin{bmatrix}-A_1 \\ pS-SA \\ C_1 \\ \sigma C\end{bmatrix}x_2(t)=0,\ t\in T_N. \qquad (3.16)$$

Из вида последних $n$ столбцов матрицы $L(\lambda)$ следует, что если условия (3.1) верны, то существует комплексное число $\lambda$, что

$$rank\begin{bmatrix} -A_1 \\ \lambda S - SA \\ C_1 \\ \sigma C \end{bmatrix} = n,$$

а значит, из (3.16) имеем $x_2(t) \equiv 0, t \in T_N$.

Продолжая аналогично для $x_k(t) \equiv 0,\ t \in T_N$, $k = \overline{3, N}$, мы покажем, что $x_N(t) \equiv 0,\ t \in T_N$.

Таким образом, если выполнено (3.2), то из $y(t) \equiv 0, t \in T$ следует $x_1(t) \equiv 0, t \in T_N$, а если, кроме того, верно (3.1), то и $x_N(t) \equiv 0, t \in T_N$. Согласно утверждению 2.5, система (1.1)–(1.3) вполне наблюдаема. □

## 4 Полная идентифицируемость системы

***Теорема* 4.1.** *Система* (1.1)–(1.3) *полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих условий*:

1) *условия теоремы* 3.1;

2) $rank\ L(\lambda) < n^2$, *но*

$$rank\begin{bmatrix} \lambda E - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ C + C_1 e^{-\lambda h} \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

*Доказательство. Достаточность* условия 1) очевидна, достаточность условия 2) следует из теоремы 3.1 и замечания 1.1.

*Необходимость* любого из условий 1), 2) доказывается как в теореме 3.1, где в качестве нетривиального решения граничной задачи (2.7), (2.12) относительно $x_1(t)$ можно рассматривать действительную функцию $\operatorname{Re}\tilde{x}(t)$ или $\operatorname{Im}\tilde{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t) = l_0 e^{\lambda_{i_0} t},\ t \in T_n. \qquad \square$$

***Замечание.*** Из выполнения условия 1) теоремы 3.1 для фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ следует выполнение условия 2) теоремы 3.1 для этого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Действительно, пусть для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ верно $rank\ L(\lambda) = n^2$. Умножим матрицу $L(\lambda)$ справа на невырожденную $n^2 \times n^2$-матрицу

$$F\left(e^{-\lambda h}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times n} & \cdots & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ e^{-\lambda h}E_n & E_n & \cdots & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ e^{-\lambda(n-2)h}E_n & 0_{n\times n} & \cdots & E_n & 0_{n\times n} \\ e^{-\lambda(n-1)h}E_n & e^{-\lambda(n-2)h}E_n & \cdots & e^{-\lambda h}E_n & E_n \end{pmatrix}.$$

В результате получим матрицу

$$\begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} & -A_1 & \ldots & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h} & \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} & \ldots & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h(n-2)} & \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h(n-3)} & \ldots & \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} & -A_1 \\ \left(\lambda S - SA\right)e^{-\lambda h(n-2)} & \left(\lambda S - SA\right)e^{-\lambda h(n-3)} & \ldots & \left(\lambda S - SA\right)e^{-\lambda h} & \lambda S - SA \\ \left(C + C_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h} & \left(C + C_1 e^{-\lambda h}\right) & \ldots & 0_{m\times n} & 0_{m\times n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \sigma C e^{-\lambda h(n-2)} & \sigma C e^{-\lambda h(n-3)} & \ldots & \sigma C e^{-\lambda h} & \sigma C \end{bmatrix}$$

ранг которой равен рангу матрицы $L(\lambda)$, и при выполнении условия 1) теоремы 3.1 равен $n^2$. Отсюда, с учетом (2.8), справедливо:

$$rank\begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h} \\ \ldots \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h(n-2)} \\ S\left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h(n-2)} \\ \left(C + C_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h} \\ \ldots \\ \sigma\left(C + C_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h(n-2)} \end{bmatrix} = n.$$

Представим последнюю матрицу в виде произведения двух матриц:

$$diag\{E_{(n-1)n}, S, E_{(m-1)n}, \sigma\} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h} \\ \ldots \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h(n-2)} \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h(n-2)} \\ \left(C + C_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h} \\ \ldots \\ \left(C + C_1 e^{-\lambda h}\right)e^{-\lambda h(n-2)} \end{bmatrix}.$$

Поскольку ранг произведения матриц не больше ранга любого из сомножителей, то справедливо

$$n \le rank \begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right) e^{-\lambda h} \\ \dots \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right) e^{-\lambda h(n-2)} \\ \left(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}\right) e^{-\lambda h(n-2)} \\ \left(C + C_1 e^{-\lambda h}\right) e^{-\lambda h} \\ \dots \\ \left(C + C_1 e^{-\lambda h}\right) e^{-\lambda h(n-2)} \end{bmatrix} =$$

$$= rank \begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ C + C_1 e^{-\lambda h} \end{bmatrix},$$

откуда с учетом размеров последней матрицы получаем

$$rank \begin{bmatrix} \lambda E - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ C + C_1 e^{-\lambda h} \end{bmatrix} = n,$$

что доказывает справедливость замечания.

Замечание подтверждает эквивалентность условий теоремы 4.1 и доказанного ранее в [4] критерия полной идентифицируемости для системы с запаздыванием.

## 5 Пример

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) + x_1(t-h), \qquad (5.1)$$
$$\dot{x}_3(t) = x_2(t-h),$$
$$y(t) = x_1(t) + x_1(t-h),\ t \in [0, 3h], \qquad (5.2)$$

которая в виде (1.1), (1.3) имеет параметры:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$C = [1, 0, 0],\ C_1 = [1, 0, 0],\quad n = 3.$$

Проверка условия (3.1) с матрицей $L(\lambda)$ из (2.11), построенной по параметрам системы (5.1), (5.2), показывает, что, например, при $\lambda = 1$ $rank\ L(\lambda) = n^2 = 9$, т. е. условие (3.1) выполнено. Более того,

$$rank\ L(\lambda) = 9\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \ne \pm i\sqrt{2},\ i^2 = -1.$$

Проверим условие (3.2) для системы (5.1), (5.2). Получаем:

$$rank \begin{bmatrix} 1 + e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ -e^{-\lambda} & \lambda & -1 \\ 0 & -e^{-\lambda} & \lambda \end{bmatrix} = 3 = n$$

для $\lambda = \pm i\sqrt{2}$.

Таким образом, система (5.1), (5.2) полностью наблюдаемая, а значит, и полностью идентифицируема.

Если вместо выхода (5.2) рассмотреть систему (5.1) с выходом без запаздывания:

$$y(t) = x_1(t),\quad t \in [0, 3h], \qquad (5.3)$$

то несложно проверить, что в этом случае $rankL(\lambda) = 8 < n^2 = 9$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, т. е. согласно теореме 3.1, система (5.1) с выходом (5.3) не является полностью наблюдаемой. Вместе с тем, используя условие 2) теоремы 4.1 для системы (5.1), (5.3) получаем:

$$rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ -e^{-\lambda} & \lambda & -1 \\ 0 & -e^{-\lambda} & \lambda \end{bmatrix} = 3 = n$$

для всех комплексных $\lambda$.

Это тождество убеждает нас в том, что система (5.1), (5.3) полностью идентифицируема.

## Заключение

Выполнено строгое обоснование и развитие на линейные стационарные системы с запаздыванием в уравнении состояния и в выходе одного подхода к получению условий полной наблюдаемости систем с запаздыванием. Подход основан на сведении задачи полной наблюдаемости системы с запаздыванием к проблеме единственности решения специальной однородной граничной задачи для системы дифференциальных уравнений без запаздывания в расширенном пространстве состояний.

Доказаны необходимые и достаточные условия полной наблюдаемости, полной идентифицируемости в смысле однозначного восстановления ненаблюдаемого куска траектории на отрезке времени длиной запаздывания по известной выходной функции. Условия имеют ранговый тип и выражены в терминах матриц исходной системы наблюдения.

Замечание после теоремы 4.1 подтверждает эквивалентность условий теоремы 4.1 и доказанного ранее в [4] критерия полной идентифицируемости для системы с запаздыванием. Вместе с тем, в отличие от указанных известных ранее условий полной идентифицируемости, проверку полноты ранга функциональной матрицы из (3.2) надо проводить лишь для конечного числа комплексных чисел, для которых не выполнено условие (3.1), что делает предложенные условия конструктивными.

Результаты с очевидными изменениями легко распространить на системы со многими соизмеримыми запаздываниями в (1.1), (1.3).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Цехан*, *О.Б.* Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно

возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром / О.Б. Цехан // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 50–61.

2. *Калман*, *Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М., 1971.

3. *Manitius*, *A.* F-Controllability and Observability of Linear Retarded Systems / A. Manitius // Appl. Math. Optim. – 1982. – Vol. 20. – P. 3–77.

4. *Lee*, *E.B.* Observability and related structural results for linear hereditary systems / E.B. Lee, A. Olbrot // International J. Control. – 1981. – Vol. 34, № 6. – P. 1061–1078.

5. *Метельский*, *А.В.* К теории полной наблюдаемости систем с запаздыванием / А.В. Метельский, С.А. Минюк // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 4. – С. 624–633.

6. *Minyuk*, *S.* On observability of linear stationary system with time delay / S. Minyuk, O. Tsekhan // Proceedings of the 14th International Conference on Systems Science. Vol. 1. Systems Theory, Control Theory, Wroclaw, Poland, 11–14 September 2001 / Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, editors: Bubnicki Z., Grzech A. – Wroclaw, 2001. – P. 197–202.

7. *Бояринцев*, *Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев; отв. ред. В.М. Матросов; Акад. наук СССР. Сиб. отд-ние. Сиб. энерг. ин-т. – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.

8. *Буков*, *В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем / В.Н. Буков. – Калуга: Изд-во науч. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.

9. *Лузин*, *Н.Н.* К изучению матричной теории дифференциальных уравнений / Н.Н. Лузин // Автоматика и телемеханика. – 1940. – № 5. – С. 3–66.

10. *Фрезер*, *Р.А.* Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике / Р.А. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар; пер. с англ. Л.И. Головиной и А.К. Колосовской. – М.: Изд-во иностр. лит., 1950 (2-я тип. Акад. наук СССР). – 446 с.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь* «*Конвергенция*-2020» (*задание* 1.3.02).

*Поступила в редакцию* 26.12.18.