Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 533.1 *ФИЗИКА*

А. В. ГЕТЛИНГ, В. В. КУЗЬМИН, Б. А. ТВЕРСКОЙ

КРИТЕРИИ ТЕПЛОВОЙ (ПЕРЕГРЕВНОЙ) НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОЗРАЧНОГО ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 5 VI 1970)

Газ, нагреваемый благодаря некоторому нерадиативному процессу и отдающий энергию посредством излучения, может оказаться неустойчивым относительно малых возмущений его термодинамических параметров. Это связано с тем, что при отклонении состояния газа от равновесного энерговыделение может увеличиться (уменьшиться) на бо́льшую величину, чем излучение. В результате будет происходить дальнейший разогрев (охлаждение).

Данный эффект может проявить себя в разнообразных астрофизических условиях. Высказывались предположения, что с тепловой неустойчивостью могут быть связаны некоторые проявления солнечной активности, в частности образование протуберанцев и корональных конденсаций ([1], [2]). Возможность неустойчивых состояний нужно иметь в виду при расчете равновесной температурной структуры солнечной хромосферы ([3]). Не исключено, что неустойчивость играет некоторую роль в процессе возникновения облаков межзвездного газа ([4]). Динамика газа, охлаждаемого излучением, рассматривалась также применительно к теории солнечных хромосферных вспышек ([5], [6]).

В ряде работ, например ([3]), использовался критерий тепловой неустойчивости, полученный из качественных соображений для изолированного объема газа. Для конкретных механизмов энерговыделения и излучения нахождение условий устойчивости связано с громоздкими вычислениями. Критерий для газа с постоянным удельным объемом в случае, когда выделение и отвод тепла зависят только от температуры, указан на основании уравнения теплового баланса в работе ([1]). Имеется обстоятельное исследование неустойчивости идеального газа ([8]). Рассмотрен вопрос о перегревной неустойчивости плазмы, нагреваемой джоулевым теплом, в сильном магнитном поле ([7]).

Используя систему газодинамических уравнений, можно получить критерий тепловой устойчивости в общем виде, считая разность выделяемой и излучаемой энергии, отнесенную к единичному объему, некоторой функцией Q термодинамического состояния газа. В настоящей работе такое исследование проведено в предположении, что газ прозрачен, и теплообмен типа лучистой теплопроводности в масштабах порядка длины волны возмущения отсутствует (длина волны мала по сравнению с пробегом фотонов), а вязкость и молекулярно-кинетическая теплопроводность пренебрежимо малы. Во второй части работы, кроме того, считается, что газ обладает высокой проводимостью и находится во внешнем магнитном поле. Вид функции Q никак не уточняется.

Запишем исходные уравнения:

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p / \rho; \tag{1}$$

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) + \operatorname{div}\left[\rho \mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] = Q(p, \rho); \tag{3}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \tag{4}$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — скорость, ε — внутренняя энергия единицы массы.

Линеаризуем систему относительно малых возмущений переменных и найдем ее характеристическое уравнение, считая все возмущения функциями вида $\mathrm{const}\cdot e^{\sigma t - i\mathbf{kr}}$. Чтобы проследить за развитием возмущений во времени, будем задавать действительные значения абсолютной величины волнового вектора $\mathbf{k}$ и находить соответствующие, вообще говоря, комплексные, значения σ.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\sigma^3 - \nu\sigma^2 + V_s^2 k^2 \sigma - \nu B k^2 = 0. \tag{5}$$

Здесь использованы обозначения

$$\nu \equiv \frac{1}{\rho}\,\frac{(\partial Q/\partial p)_\rho}{(\partial \varepsilon/\partial p)_\rho}, \qquad B \equiv -\frac{(\partial Q/\partial \rho)_p}{(\partial Q/\partial p)_\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_Q,$$

$$V_S^2 \equiv -\frac{(\partial \varepsilon/\partial \rho)_p}{(\partial \varepsilon/\partial p)_\rho} + \frac{p}{\rho^2 (\partial \varepsilon/\partial p)_\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \tag{6}$$

(s — энтропия; все функции вычислены для равновесного состояния).

Согласно критерию Гурвица [8], решение линеаризованной системы асимптотически устойчиво (все корни σ_i характеристического уравнения обладают свойством $\operatorname{Re}\sigma_i < 0$) в том и только в том случае, если

$$\nu < 0, \quad V_S^2 > B > 0. \tag{7}$$

Уравнению (5), которое заменой $y = \sigma - \nu/3$ приводится к виду $y^3 + 3py + 2q = 0$, можно сопоставить выражение

$$D \equiv p^3 + q^2 = (V_S^2 k^2/3 - \nu^2/9)^3 + (\nu V_S^2 k^2/6 - \nu B k^2/2 - \nu^3/27)^2. \tag{8}$$

Обозначим через $(k^2)_{1,2}$ квадраты корней биквадратного уравнения $D = 0$. При $(k^2)_2 \geqslant k^2 \geqslant (k^2)_1$ $D \leqslant 0$, все корни характеристического уравнения действительны, и возможна только динамическая неустойчивость (апериодическое нарастание возмущения). Если $k^2 < (k^2)_1$ или $k^2 > (k^2)_2$, то $D > 0$, характеристическое уравнение имеет, кроме одного действительного, два сопряженных комплексных корня, определяющих колебательную моду, которая может оказаться неустойчивой.

Для предельного случая $|\nu| \ll |V_S k|$ корни уравнения (5) легко найти в линейном приближении, вычислив малые (порядка ν) поправки к корням «невозмущенного» уравнения $\sigma^3 + V_s^2 k^2 \sigma = 0$. Подставляя $\sigma_i^{(1)} = \sigma_i + \sigma_i$ в (5) и сравнивая порядки величин различных членов, получаем формулы, верные при $|B| \lesssim V_s^2$:

$$\sigma_1^{(1)} = \nu\frac{B}{V_S^2}, \quad \sigma_{2,3}^{(1)} = \pm i V_S k + \frac{\nu}{2}\,\frac{V_S^2 - B}{V_S^2}. \tag{9}$$

Формулы (9) определяют инкременты развития неустойчивости и показывают, какая мода становится неустойчивой при нарушении того или иного из условий (7). Видно, в частности, что при $\nu(V_s^2 - B) > 0$ происходит раскачка звуковых колебаний.

Обратимся теперь к случаю, когда рассматриваемый газ обладает высокой проводимостью и находится в однородном внешнем магнитном поле. Предположим, что характерные времена процессов значительно меньше времени омической диффузии магнитного поля, и запишем уравнения магнитной гидродинамики, пренебрегая теплопроводностью, а также кинематической и магнитной вязкостью:

$$\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p/\rho - (1/4\pi\rho)\,[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]; \tag{10}$$

$$\partial \rho/\partial t + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0; \tag{11}$$

$$\partial \mathbf{H}/\partial t = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}\mathbf{H}]; \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon+\frac{H^2}{8\pi}\right)+\operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right)+\frac{1}{4\pi}[\mathbf{H}[\mathbf{v}\mathbf{H}]]\right\}=Q(p,\rho); \tag{13}$$

$$\varepsilon=\varepsilon(p,\rho). \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{H}$ — магнитное поле, а остальные обозначения имеют прежний смысл.

Выполним линеаризацию системы (10) — (14), считая невозмущенным значением $\mathbf{H}$ вектор внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$. В уравнении (13) уничтожатся члены, содержащие $\mathbf{H}_0$. При решении системы удобно пользоваться системой координат, одна из осей которой совпадает по направлению с волновым вектором $\mathbf{k}$. Исключив все переменные, кроме $\mathbf{v}$ и возмущения магнитного поля $\mathbf{h}$, получим две независимые системы уравнений. Одна из них имеет характеристическое уравнение

$$\sigma^2+V_A^2k^2\cos^2\varphi=0 \tag{15}$$

($V_A^2\equiv H_0^2/4\pi\rho$, $\cos\varphi\equiv\mathbf{H}_0\mathbf{k}/H_0k$) и описывает альфвеновские волны, другая — характеристическое уравнение

$$\sigma^5-\nu\sigma^4+(V_A^2+V_S^2)k^2\sigma^3-\nu(V_A^2+B)k^2\sigma^2+V_A^2V_S^2k^4\sigma\cos^2\varphi-$$

$$-\nu V_A^2Bk^4\cos^2\varphi=0 \tag{16}$$

(здесь использованы обозначения (6)).

Для исследования корней уравнения (16) в случае $\cos\varphi\neq0$ воспользуемся критерием Льенара — Шипара [8], который эквивалентен критерию Гурвица, но более удобен при высоких степенях характеристического уравнения. Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости общего решения исходной линеаризованной системы является выполнение неравенств

$$\nu<0,\quad V_S^2>B>0, \tag{17}$$

$$V_S^2>0,\quad V_A^2+V_S^2>0,\quad V_A^2+B>0. \tag{18}$$

Первые два из условий (18) тривиальны, а третье содержится в условии $B>0$. Отбрасывая (18), находим, что магнитное поле, неперпендикулярное волновому вектору, не влияет на критерий устойчивости относительно малых возмущений.

Если $\cos\varphi=0$, то (16) является кубическим уравнением

$$\sigma^3-\nu\sigma^2+(V_A^2+V_S^2)k^2\sigma-\nu(V_A^2+B)k^2=0, \tag{19}$$

и критерий Гурвица дает следующие условия асимптотической устойчивости:

$$\nu<0,\quad V_S^2>B>-V_A^2. \tag{20}$$

По сравнению со случаем $\mathbf{H}_0=0$ (см. (7)) (20) является более слабым ограничением, так как допускает отрицательные значения B без нарушения устойчивости. Формально это выражается в обращении в нуль при $\cos\varphi=0$ инкремента одной из неустойчивых мод. Таким образом, магнитное поле при $\mathbf{H}_0\perp\mathbf{k}$ оказывает стабилизирующее действие на проводящий газ.

Для случая сильного поля $|\nu|\ll|V_Ak|$, $V_S^2\ll V_A^2$, $|B|\ll V_A^2$ найдем корни σ_i уравнения (16). Для этого представим левую часть (16) в виде $D^{(0)}(\sigma)+D'(\sigma)$, где в $D^{(0)}(\sigma)$ собраны все члены, не содержащие ν. Малую поправку к нулевому корню уравнения $D^{(0)}(\sigma)=0$ найдем, приравнивая нулю сумму двух наиболее существенных членов левой части (16), а поправки к остальным корням $\sigma_i^{(0)}$ вычислим по формуле

$$\sigma_i' = -D'(\delta_i^{(0)}) \Big/ \left(\frac{\partial D^{(0)}}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=\sigma_i^{(0)}},$$

считая, что $|\sigma_i'| \ll |\sigma_i^{(0)}|$. В результате получим

$$\sigma_1^{(1)} = \nu \frac{B}{V_S^2}, \quad \sigma_2^{(1)} = \pm iV_A k\left(1 + \frac{1}{2}\frac{V_S^2}{V_A^2}\sin^2\varphi\right) + \frac{\nu}{2}\frac{V_S^2 - B}{V_A^2}\sin^2\varphi,$$

$$\sigma_3^{(1)} = \pm iV_S k\cos\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\frac{V_S^2}{V_A^2}\sin^2\varphi\right) + \frac{\nu}{2}\frac{V_S^2 - B}{V_S^2}. \tag{21}$$

Применимость первой из этих формул ограничена условиями $\nu^2 \ll V_S^2 k^2 \cos^2\varphi$, $\nu^2 \ll |B| k^2 \cos^2\varphi$, $|B| \lesssim V_S^2$, а третьей — условием $|\nu(1 - B/V_S^2)| \ll |V_S k \cos\varphi|$.

Если $\cos\varphi = 0$, а $|\nu| \ll |V_A k|$, то корни уравнения (19), вычисленные аналогично (9), имеют вид

$$\sigma_1^{(1)} = \nu\,\frac{V_A^2 + B}{V_A^2 + V_S^2}, \quad \sigma_{2,3}^{(1)} = \pm iV_A k\sqrt{1 + \frac{V_S^2}{V_A^2}} + \frac{\nu}{2}\frac{V_S^2 - B}{V_A^2 + V_S^2}. \tag{22}$$

Первая формула верна при дополнительном условии $|B| \lesssim V_S^2$, вторая — при $|B - V_S^2| \lesssim V_A^2$. Если $\cos\varphi = 1$ $(\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{k})$, то (16) переходит в (5), и становятся справедливыми все результаты исследования случая $\mathbf{H}_0 = 0$.

Институт ядерной физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. N. Parker, Astrophys. J., 117, 431 (1953). [2] К. О. Кипенхойер, В кн. Солнце, М., 1955. [3] Р. Томас, Р. Атей, Физика солнечной хромосферы, М., 1965, гл. 5. [4] G. B. Field. In: The Distribution and Motion of Interstellar Matter in Galaxies, N. Y., 1962, p. 183. [5] E. A. Spiegel, Astrophys. J., 126, 202 (1957). [6] L. Oster, Zs. Astrophys., 44, 26 (1957). [7] Б. Б. Кадомцев, В кн. Вопросы теории плазмы, в. 2, М., 1963, стр. 173. [8] Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, М., 1966. [9] G. B. Field, Astrophys. J., 142, 531 (1965).