

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC ANALOGUES OF NORMAL SUBGROUPS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: полиадическая операция, полуинвариантные l -арные подгруппы, n -полуинвариантные l -арные подгруппы.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 45–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_45. – EDN: QDMGXA

Abstract. The study on the polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroups, n -semiinvariant l -ary subgroups.

For citation: Gal'mak, A.M. Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 45–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_45 (in Russian). – EDN: QDMGXA

Введение

Данная статья, посвящённая изучению полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на лемму 2.1 означает, что имеется в виду лемма 2.1 из раздела 2 в [1].

4 Условия не n -полуинвариантности

В следующей теореме доказываются неравенства, позволяющие сформулировать признаки не n -полуинвариантности, в частности неинвариантности подалгебр в полиадических группах специального вида.

Теорема 4.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда:

1) если для некоторого $t = 2, \dots, l-1$ подстановка σ^{t-1} не является тождественной, то

существует такой элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, что

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}), \quad (4.1)$$

то есть l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$;

2) если для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то существует такой элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, что

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$.

Доказательство. 1) Если σ^{t-1} – нетождественная подстановка, то существует $j \in \{1, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{t-1}(j) \neq j$, а так как $B \neq A$, то найдется такой элемент $u \in A$, $u \notin B$, что

$$\eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) \neq B. \quad (4.2)$$

Зафиксируем элемент $b \in B$ и выберем в A^k элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ так, что $x_j = u$, все остальные компоненты равны b , в частности $x_{\sigma^{t-1}(j)} = b$.

Неравенство $\sigma^{t-1}(j) \neq j$ гарантирует такой выбор. Для случая $\sigma^{t-1}(j) = j$ такой выбор был бы невозможен, так как $u \neq b$.

Если предположить инвариантность $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle > \langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1})$$

для выбранного \mathbf{x} .

Применяя к левой части последнего равенства утверждение 3) леммы 2.1, а к правой – предложение 2.2 при $B = C$, получим

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{x_1 B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{x_k B \dots B}_{n-1}) &= \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{-1}(1)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \dots \\ &\dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{-1}(j)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \dots \\ &\dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{-1}(k)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}), \end{aligned}$$

откуда

$$\eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{-1}(j)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}).$$

Тогда из условия

$$x_j = u, x_{\sigma^{-1}(j)} = b \in B, u \notin B$$

получаем

$$\eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) = B,$$

что противоречит (4.2). Поэтому верно (4.1). Следовательно, $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

2) Полагаем в 1) $t = (i-1)(n-1) + 1$. □

Замечание 4.1. В утверждении 1) теоремы 4.1 отсутствует случай $t = l$, так как в этом случае из условия $\sigma^l = \sigma$ следует тождественность подстановки σ^{l-1} , что противоречит условию.

Замечание 4.2. В утверждении 2) теоремы 4.1 условием $i = 2, \dots, s$ исключается случай $l = n$, так как в этом случае $s = 1$.

5 Следствия

Полагая в теореме 4.1 $t = 2, i = 2$, получим

Следствие 5.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A$. Тогда:

1) если подстановка σ не является тождественной, то существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-2}),$$

то есть l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) если подстановка σ^{n-1} не является тождественной, то существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{n-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s-1)(n-1)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Считая в утверждении 1) теоремы 4.1 σ циклом длины $m \geq 2$, где m делит $l-1$, получим

Следствие 5.2. Пусть $\sigma -$ цикл из S_k длины $m \geq 2, m$ делит $l-1, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A, t -$ любой элемент множества $\{2, \dots, m\}$. Тогда существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что верно равенство (4.1), то есть l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Доказательство теоремы 4.1 позволяет более конкретно переформулировать следствие 5.2.

Следствие 5.3. Пусть $\sigma = \{i_1, \dots, i_m\} -$ цикл из S_k длины $m \geq 2, m$ делит $l-1, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A, b -$ произвольный элемент из $B, u -$ произвольный элемент из $A \setminus B$, зафиксируем любой $j \in \{i_1, \dots, i_m\}$ и положим

$$\mathbf{x} = (x_1 = b, \dots, x_{j-1} = b, x_j = u, x_{j+1} = b, \dots, x_k = b).$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-2}),$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-3}),$$

...

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{m-2} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-m+1}),$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{m-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-m}),$$

то есть l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Если $\sigma -$ цикл длины $m \geq 2, m$ не делит $n-1$, то подстановка σ^{n-1} не является тождественной. Поэтому, считая в утверждении 2) теоремы 4.1 $i = 2, \sigma$ циклом длины $m \geq 2$, где m делит $l-1, m$ не делит $n-1$, получим

Следствие 5.4. Пусть $\sigma = \{i_1, \dots, i_m\} -$ цикл из S_k длины $m \geq 2, m$ делит $l-1, m$ не делит $n-1, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A, b -$ произвольный элемент из $B, u -$ произвольный элемент из $A \setminus B$, зафиксируем любой $j \in \{i_1, \dots, i_m\}$ и положим

$$\mathbf{x} = (x_1 = b, \dots, x_{j-1} = b, x_j = u, x_{j+1} = b, \dots, x_k = b).$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{n-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s-1)(n-1)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Замечание 5.1. В следствиях 5.3 и 5.4 в качестве цикла длины m можно взять цикл $(12 \dots m) \in S_k$. При этом будут выполняться все неравенства из этих следствий. Сформулируем соответствующие следствия, не указывая эти неравенства.

Следствие 5.5. Пусть m делит $l-1, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A$.

Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$.

Следствие 5.6. Пусть t делит $l-1$, t не делит $n-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$.

Полагая в следствиях 5.5 и 5.6 $t = k$, получим ещё два следствия.

Следствие 5.7. Пусть k делит $l-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$.

Следствие 5.8. Пусть k делит $l-1$, k не делит $n-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$.

Случай $n = 2$. В этом случае понятия 2-полуинвариантности и полуинвариантности для n -арных подгрупп тождественны понятию нормальности для подгрупп. Потому при $n = 2$ из теорем 3.1 (утверждение 2)) и 4.1 (утверждение 1) при $t = 2$) вытекает

Следствие 5.9. [2, предложение 4.1.1]. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, B – подгруппа группы A . Тогда:

1) l -арная подгруппа $\langle B^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда подгруппа B нормальна в группе A ;

2) если $B \neq A$, подстановка σ не является тождественной, то $\langle B^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Можно сформулировать аналогичные бинарные результаты для других приведённых выше следствий. Ограничимся здесь таким результатом для следствий 3.3 (утверждение 2)) и 5.8, считая в нём $n = 2$, $l = k + 1$.

Следствие 5.10 [2, следствие 4.1.4]. Пусть B – подгруппа группы A . Тогда:

1) $(k+1)$ -арная подгруппа $\langle B^k, []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ $(k+1)$ -арной группы $\langle A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ полуинвариантна в ней тогда и только тогда, когда подгруппа B нормальна в группе A ;

2) если $B \neq A$, то $\langle B^k, []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$.

Случай $n = 3$. Полагая в теореме 4.1 $n = 3$, получим

Следствие 5.11. Пусть для подстановки σ из S_k подстановка σ^{2s} является тождественной, $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда:

1) если для некоторого $t = 2, \dots, 2s$ подстановка σ^{t-1} не является тождественной, то существует такой элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{2s-t+1}), \quad (5.1)$$

то есть $(2s+1)$ -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) если для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{2(i-1)}$ не является тождественной, то существует такой элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{2(i-1)} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{2(s+1-i)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является 3-полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Аналогичные результаты, соответствующие случаю $n = 3$, можно сформулировать для всех полученных выше следствий из теоремы 4.1. Ограничимся следствиями 5.1 и 5.2.

Следствие 5.12. Пусть для подстановки σ из S_k подстановка σ^{2s} является тождественной, $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда:

1) если подстановка σ не является тождественной, то существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s-1}),$$

то есть $(2s+1)$ -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) если подстановка σ^2 не является тождественной, то существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2(s-1)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является 3-полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Следствие 5.13. Пусть σ – цикл из S_k длины $t \geq 2$, t делит $2s$, $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$, t – любой элемент множества $\{2, \dots, t\}$. Тогда существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что верно неравенство (5.1), то есть $(2s+1)$ -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58.

2. Гальмак, А.М. Полиадические операции и обобщённые матрицы / А.М. Гальмак. – Могилёв: МГУП, 2015. – 295 с.

Поступила в редакцию 25.09.2024.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор