Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

В. П. ГРИГОРЬЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 VI 1970)

В работе рассмотрены смешанные задачи для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, имеющих следующий вид:

$$P_{2s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u + \mathscr{L}_{2m}(x, D)u + \lambda u + \beta(t, x, D^\alpha u^{(r)}) = h(t, x). \qquad (1)$$

Здесь а) $P_{2s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u = \sum\limits_{q=0}^{2s} a_q u^{(q)}$, $a_q \in \mathbf{R}^1$, $u^{(q)} = \dfrac{\partial^q u}{\partial t^q}$, $a_{2s} = (-1)^{s-1}$, $s > 1$; б) $\mathscr{L}_{2m}(x, D)$ — сильно эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$, символ D означает дифференцирование по пространственным переменным; в) λ — вещественное число; г) $\beta(t, x, D^\alpha u^{(r)})$ — нелинейная непрерывная функция, подчиненная условиям на рост и некоторому условию дефинитности.

Линейные уравнения вида (1) изучались Ю. А. Дубинским в работах [1, 2] и были названы им частично гиперболическими. При $s = 1$ нелинейные уравнения вида (1) и классическая смешанная задача для них были изучены в работах [3, 4]. Отметим, что разрешимость нелинейных гиперболических уравнений изучалась также в работах [7–14]. В данной работе мы не делаем обобщений результатов на дифференциально-операторные уравнения, как это сделано, например, в работе [4], хотя нетрудно построить абстрактную схему, соответствующую данному случаю уравнений с частными производными.

2. Обозначения. Пусть Ω — открытая область в $\mathbf{R}_x^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$; I, $I \subset \mathbf{R}_t^1$ — некоторый конечный или бесконечный интервал; $Q = I \times \Omega$ — цилиндр с боковой границей $\Gamma = I \times \partial\Omega$. Мы будем обозначать через $\mathscr{L}_{p,\gamma}(I; X)$, $p \geqslant 1$, пространство функций, определенных на I, со значениями в B-пространстве X, суммируемых с p-й степенью на I с весом $e^{-\gamma t}$, $\gamma \in \mathbf{R}^1$, с нормой

$$\|u\|_{\mathscr{L}_{p,\gamma}(I;X)} = \left(\int\limits_I \|u\|_X^p e^{-\gamma t}\,dt\right)^{1/p}.$$

Норму в комплексном пространстве Соболева С. Л. $W_2^m(\Omega)$ мы будем обозначать через $\|\cdot\|_m$. Обозначим через $\mathscr{H}(I, s, m, \gamma)$ пространство функций $u(t, x)$, определенных в Q и имеющих конечную норму

$$\|u\|_{\mathscr{H}(I,s,m,\gamma)} = \left\{\int\limits_I (\|u^{(s)}\|_0^2 + \|u\|_m^2)\, e^{-\gamma t}\,dt\right\}^{1/2},$$

и через $\mathring{\mathscr{H}}(I, s, m, \gamma)$ — его подпространство, выделенное условиями

$$u(0, x) = u'(0, x) = \ldots = u^{(s-2)}(0, x) = 0, \quad D^\omega u|_\Gamma = 0, \quad |\omega| \leqslant m - 1.$$

Здесь $D^\omega = \partial^{|\omega|} / \partial x_1^{\omega_1} \partial x_2^{\omega_2} \ldots \partial x_n^{\omega_n}$, $|\omega| = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$. Скалярное произведение в комплексном пространстве $\mathscr{L}_{2,\gamma}(I; \mathscr{L}_2(\Omega))$ мы будем обозначать через $\langle u, v\rangle_\gamma$, опуская индекс при $\gamma = 0$. Мы сохраняем это обозначение и в случае, когда интеграл $\int\limits_Q u(t, x)\overline{v(t, x)}e^{-\gamma t}dx\,dt$ существует, возможно, в смысле обобщенных функций.

3. Задача в полубесконечном цилиндре. Рассмотрим в области $Q=I\times\Omega$, где $I=[0,+\infty)$, дифференциальное уравнение вида

$$P_{2s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u+\mathscr{L}_{2m}(x,D)u+\lambda u+\beta(t,x,u')=h(t,x) \tag{2}$$

при условиях:

а) $u(0,x)=u'(0,x)=\ldots=u^{(s)}(0,x)=0$;

б) $D^{\omega}u|_{\Gamma}=0,\quad|\omega|\leqslant m-1.$ (3)

Оператор $\mathscr{L}_{2m}(x,D)$ предполагается равномерно сильно эллиптическим, с достаточно гладкими комплексными коэффициентами и самосопряженным при условиях (3). Функция $\beta(t,x,\xi)$ предполагается непрерывной в $Q\times\mathbf{R}_{\xi}^{1}$ и удовлетворяющей условиям:

а) $|\beta(t,x,\xi)|\leqslant K_1|\xi|^{p-1}$, $\forall\xi\in\mathbf{R}^1$, K_1 — постоянная, не зависящая от t, x и ξ; $p>1$ — некоторое фиксированное число;

б) $\operatorname{Re}\langle\beta(t,x,v),v\rangle_{\gamma}\geqslant K_{\gamma}\|v\|^{p}_{\mathscr{L}_{p,\gamma}(I;\mathscr{L}_p(\Omega))}$, где $\gamma>0$; для любой функции $v(t,x)\in\mathscr{L}_{p,\gamma}(I;\mathscr{L}_p(\Omega))$ и положительная постоянная K_{γ} не зависит от t, x и v.

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные ограничения. Тогда существует такая константа $\alpha(\gamma)$, что при $\lambda\geqslant\alpha(\gamma)$ для любой правой части $h(t,x)$ такой, что $h(t,x)\in\mathscr{L}_{2,\gamma}(I;H^{-m}(\Omega))$, $h'(t,x)\in\in\mathscr{L}_{2,\gamma}(I;H^{-m}(\Omega))$, найдется функция $u(t,x)$, удовлетворяющая условиям:*

1) $u(t,x)\in\mathscr{H}(I,s,m,\gamma)$;

2) $u'(t,x)\in\mathscr{L}_{p,\gamma}(I;\mathscr{L}_p(\Omega))$;

3) $\forall\,v(t,x)\in\mathscr{L}_{2,\gamma}(I;\mathring{H}^{m}(\Omega))\cap\mathscr{L}_{p,\gamma}(I;\mathscr{L}_p(\Omega))$ *верно равенство* $\langle P_{2s}u,v\rangle_{\gamma}+\langle\mathscr{L}_{2m}u,v\rangle_{\gamma}+\lambda\langle u,v\rangle_{\gamma}+\langle\beta(t,x,u'),v\rangle_{\gamma}=\langle h,v\rangle_{\gamma}$;

4) $u(0,x)=u'(0,x)=\ldots=u^{(s)}(0,x)=0$;

5) $D^{\omega}u|_{\Gamma}=0$, $|\omega|\leqslant m-1$;

(*Здесь* $H^{-m}(\Omega)=W_2^{-m}(\Omega)$).

Отметим основные моменты доказательства. Выберем систему $\{v_i(t,x)\}$ гладких, финитных по x и при $t\to+\infty$ функций, удовлетворяющих условиям:

а) $v_i(0,x)=v_i'(0,x)=\ldots=v_i^{(s-2)}(0,x)=0$;

б) $D^{\omega}v_i(t,x)|_{\Gamma}=0$, $|\omega|\leqslant m-1$, и полную (линейные комбинации плотны) в пространстве $\mathring{\mathscr{H}}(I,s,m,\gamma)\cap\mathscr{L}_{p,\gamma}(I;\mathscr{L}_p(\Omega))$. Приближенные решения уравнения (2) будем искать в виде

$$u_k(t,x)=\sum_{i=1}^{k}c_{ik}\int_0^t v_i(\tau,x)\,d\tau,$$

где неизвестные коэффициенты c_{ik} определяются нелинейной системой алгебраических уравнений

$$\langle u_k,P_{2s}^{*}(v_ie^{-\gamma t})\rangle+\langle L_{2m}u_k,v_i\rangle_{\gamma}+\lambda\langle u_k,v_i\rangle_{\gamma}+\langle\beta(u_k'),v_i\rangle_{\gamma}=\langle h,v_i\rangle_{\gamma},$$

$$i=1,2,\ldots,k;\quad P_{2s}^{*}\equiv\sum_{q=0}^{2s}(-1)^q a_q\frac{\partial^q}{\partial t^q}\cdot \tag{4}$$

Далее для этих уравнений доказывается выполнение «условия острого угла», обеспечивающего разрешимость системы (4), а также априорная оценка вида

$$\int_I(\|u_k^{(s)}\|_0^2+\|u_k\|_m^2+\|u_k'\|^{p}_{\mathscr{L}_p(\Omega)})e^{-\gamma t}\,dt\leqslant K_2\int_I(\|h\|^2_{-m}+\|h'\|^2_{-m})e^{-\gamma t}\,dt,$$

где положительная константа K_2 не зависит от k. Из этой оценки следует существование подпоследовательности $\{u_{\mu}(t,x)\}$, слабо сходящейся в соответствующих пространствах к функции $u(t,x)$, удовлетворяющей условиям 1), 2) и 5) теоремы 1. Переходя к пределу при $\mu\to+\infty$ в равенствах (4) и замыкая по v_i, получим тождество

$$\langle u, P_{2s}^{*}(ve^{-\gamma t})\rangle + \langle \mathscr{L}_{2m}u, v\rangle_\gamma + \lambda\langle u, v\rangle_\gamma + \langle \psi, v\rangle_\gamma = \langle h, v\rangle_\gamma, \qquad (5)$$

где ψ — слабый предел нелинейного члена в пространстве $\mathscr{L}_{p',\gamma}(I, \mathscr{L}_{p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$. Это тождество справедливо для любой функции $v \in \in \mathscr{H}(I, s, m, \gamma) \cap \mathscr{L}_{p,\gamma}(I; \mathscr{L}_p(\Omega))$. Из этого тождества выводим, что $u^{(l)}_{(t,x)} \in \mathscr{L}_{2,\gamma}(I; H^{-m}(\Omega)) + \mathscr{L}_{p',\gamma}(I; \mathscr{L}_{p'}(\Omega))$, $l \leqslant 2s$. Интегрируя по частям тождество (5) при гладких и финитных по t и по x функциях v и делая замыкание, получим справедливость тождества

$$\langle P_{2s}u, v\rangle_\gamma + \langle \mathscr{L}_{2m}u, v\rangle_\gamma + \lambda\langle u, v\rangle_\gamma + \langle \psi, v\rangle_\gamma = \langle h, v\rangle_\gamma$$

для любой функции $v \in \mathscr{L}_{2,\gamma}(I; \mathring{H}^m(\Omega)) \cap \mathscr{L}_{p,\gamma}(I; \mathscr{L}_p(\Omega))$. При этом, в силу выбора функций v_i $(v_i^{(s-1)}(0,x) \neq 0)$, получим $u^{(s)}(0,x) = 0$, что означает, что условие 4) теоремы 1 имеет место. Предельный переход в нелинейном члене делается с использованием теоремы компактности, некоторый общий вариант которой приведен в конце пункта. По этой теореме множество $\{u_k(t,x)\}$ приближенных решений оказывается компактно вложенным в пространство $\mathscr{L}_2(\Omega_1; W^1_{2,\gamma}(0,\infty))$, где Ω_1 — произвольное компактное подмножество области Ω. Это позволяет для любой компактной подобласти G цилиндра Q выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в G. Этого достаточно для перехода к пределу в нелинейном члене.

Приведем теорему компактности, обобщающую на случай n переменных известную теорему Ж-П. Обена ([5]), и на B-пространства — один из результатов Никольского С. М. (см. ([6])).

Теорема 2. *Пусть A_0, A_1, A_2 — B-пространства такие, что $A_0 \subset A_1 \subset \subset A_2$, причем первое вложение компактно. Рассмотрим множество сильно измеримых функций $y(x)$, определенных в Ω со значениями в A_2. Выделим подмножество Y условиями*

$$Y = \left\{ y(x) \,\middle|\, \int_\Omega \|y(x)\|^p_{A_0}\,dx \leqslant M;\ \int_\Omega \left\| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right\|^p_{A_2} dx \leqslant M;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ p > 1 \right\}.$$

Тогда множество Y компактно вложено в пространство $\mathscr{L}_p(\Omega_1; A_1)$, где Ω_1 — компактная подобласть Ω.

4. Задача в ограниченном цилиндре. Рассмотрим уравнение

$$P_{2s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u + \mathscr{L}_{2m}(x, D)u + \lambda u + (-1)^{s-2}\frac{\partial^{s-2}}{\partial t^{s-2}}\beta(t, x, u^{(s-1)}) = h(t, x) \quad (6)$$

в области Q, когда $I = [0, T]$, при условиях:

а) $u(0,x) = u'(0,x) = \ldots = u^{(s)}(0,x) = 0$;

б) $u'(T,x) = u''(T,x) = \ldots = u^{(s-1)}(T,x) = 0$; (7)

в) $D^\omega u|_\Gamma = 0$, $|\omega| \leqslant m - 1$;

Относительно операторов P_{2s} и $\mathscr{L}_{2m}$ прежние предположения остаются в силе. Функция $\beta(t, x, \xi)$ предполагается удовлетворяющей следующим условиям:

а) $\beta(t, x, \xi)$ — непрерывна в $Q \times \mathbf{R}_\xi^1$;

б) $|\beta(t, x, \xi)| \leqslant K_3|\xi|^{p-1}$, $p > 1$, где константа K_3 не зависит от t, x и ξ;

в) $\operatorname{Re}\langle\beta(t, x, u^{(s-1)}), u^{(s-1)}\rangle \geqslant K_4\|u^{(s-1)}\|^p_{\mathscr{L}_p(Q)}$ для любой функции $u(t,x)$ из пространства $\mathscr{L}_p(\Omega; \mathring{W}_p^{s-1}(0, T))$, где K_4 не зависит от t, x и u.

Пусть $\lambda \in \mathbf{R}^1$ фиксировано и $h(t,x)$ так же, как и $h'(t,x)$ — из пространства $\mathscr{L}_2(I; H^{-m}(\Omega))$. Здесь мы будем обозначать $\mathscr{H}(I, s, m, 0)$ через $\mathscr{H}(I, s, m)$ и через $\mathring{\mathscr{H}}(I, s, m)$ — его подпространство, выделенное условиями $u(0,x) = u'(0,x) = \ldots = u^{(s-2)}(0,x) = 0$ и $u(T,x) = 0$ вместе со всеми производными по t до порядка $s-1$, $D^\omega u|_\Gamma = 0$.

Теорема 3. *Если выполнены приведенные выше условия, то существует константа α такая, что при $\lambda \geqslant \alpha$ для любой функции $h(t,x)$ из указанного класса найдется функция $u(t,x)$, удовлетворяющая условиям:*

1) $u(t,x) \in \mathscr{H}(I,s,m)$;

2) $u^{(s-1)}(t,x) \in \mathscr{L}_p(I; \mathscr{L}_p(\Omega))$;

3) $\forall\, v(t,x) \in \mathring{\mathscr{H}}(I,s,m) \cap \mathscr{L}_p(\Omega; \mathring{W}_p^{s-1}(0,T))$ *справедливо тождество* $\langle u, P_{2s}{}^*v\rangle + \langle \mathscr{L}_{2m}u, v\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \langle \beta(t,x,u^{(s-1)}), v^{(s-2)}\rangle = \langle h, v\rangle$, *где интегралы понимаются в смысле обобщенных функций*:

4) $u(0,x) = u'(0,x) = \ldots = u^{(s)}(0,x) = 0$;

5) $u'(T,x) = u''(T,x) = \ldots = u^{(s-1)}(T,x) = 0$;

6) $D^\omega u|_\Gamma = 0$, $|\omega| \leqslant m-1$.

Доказательство теоремы проводится по плану, близкому к плану доказательства теоремы 1 с некоторыми техническими изменениями.

5. Задача в полупространстве. Рассмотрим уравнение вида (2) в полупространстве $t \geqslant 0$: $\mathbf{R}_x{}^n \times I$, $I = [0, +\infty)$, при условиях $u(0,x) = u'(0,x) = \ldots = u^{(s)}(0,x) = 0$. Все ограничения на операторы P_{2s}, $\mathscr{L}_{2m}$ и функцию $\beta(t,x,\xi)$ остаются в силе с той разницей, что в данном случае $\Omega = \mathbf{R}_x{}^n$, $\mathscr{L}(x,D) = \mathscr{L}(D)$, и $\operatorname{Re}\langle \beta(t,x,u) - \beta(t,x,v), u - v\rangle_\gamma \geqslant 0$ для любых двух функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$ из пространства $\mathscr{L}_{p,\gamma}(I; \mathscr{L}_p(\Omega))$. Пусть функция $h(t,x) \in \mathscr{L}_{2,\gamma}(I; \mathscr{L}_2(\mathbf{R}^n))$ и $h'(t,x) \in \mathscr{L}_{2\gamma}(I; W_2{}^{-m}(\mathbf{R}^n))$, где $\gamma > 0$ — некоторое фиксированное число.

Теорема 4. *При выполнении перечисленных выше условий существует такая константа* $\alpha(\gamma)$, *что при* $\lambda \geqslant \alpha(\gamma)$ *найдется единственная функция* $u(t,x)$, *удовлетворяющая условиям*:

1) $u(t,x) \in \mathscr{H}(I,s,m,\gamma)$;

2) $u'(t,x) \in \mathscr{L}_{p,\gamma}(I; \mathscr{L}_p(\mathbf{R}^n))$;

3) $\forall\, v(t,x) \in \mathscr{L}_{2,\gamma}(I; \mathring{H}^m(\mathbf{R}^n)) \cap \mathscr{L}_{p,\gamma}(I; \mathscr{L}_p(\mathbf{R}^n))$ *справедливо тождество* $\langle P_{2s}u, v\rangle_\gamma + \langle \mathscr{L}_{2m}u, v\rangle_\gamma + \lambda\langle u, v\rangle_\gamma + \langle \beta(u'), v\rangle_\gamma = \langle h, v\rangle_\gamma$;

4) $u(0,x) = u'(0,x) = \ldots = u^{(s)}(0,x) = 0$.

Доказательство во многом напоминает доказательство теоремы 1, за исключением предельного перехода в нелинейном члене и доказательства единственности. Здесь применяется техника осреднения по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и предельный переход, технически близкий к работе ([4]).

6. Замечание 1. Техника, используемая в доказательстве теоремы 1, позволяет получить аналогичную теорему для нелинейных членов, зависящих от производных $D^\alpha u$, $|\alpha| \leqslant m-1$, вида $(-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(t,x,D^\alpha u)$.

Замечание 2. Случай, когда $I = R_t{}^1$, также без труда может быть изучен с нелинейностями, допустимыми в теореме 1. Условия при $t=0$ при этом отсутствуют.

Замечание 3. Теорема 3 может быть сформулирована и в более общем, хотя и несколько громоздком виде, если рассматривать нелинейности со смешанными производными вида

$$(-1)^{|\alpha|+k-2} D^\alpha \frac{\partial^{k-2}}{\partial t^{k-2}} A(t,x,D^\alpha u^{(k-1)}).$$

Замечание 4. Задача, рассмотренная в пункте 5, имеет соответствующие аналоги при $I = [0,T]$ и при $I = \mathbf{R}_t{}^1$, где также можно доказать существование и единственность.

В заключение автор приносит благодарность Дубинскому Ю. А. за постоянное внимание к работе

Московский
энергетический институт

Поступило
27 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Дубинский, ДАН, 181, № 5, 1046 (1968). [2] Ю. А. Дубинский, Тр. Московск. матем. общ., 20, 203 (1969). [3] J.-L. Lions, W. A. Strauss, C. R., 257, 3267 (1963). [4] J.-L. Lions, W. A. Strauss, Bull. Soc. Math. France, 93, 43 (1965). [5] J.-P. Aubin, C. R., 256, 5042 (1963). [6] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, Матем., 20, 611 (1956). [7] K. Jörgens, Math. Zs., 77, 295 (1961). [8] F. E. Browder, Math. Zs., 80, 249 (1962). [9] I. E. Segal, Ann. Math., 78, 339 (1963). [10] I. E. Segal, Bull. Soc. Math. France, 91, 129 (1963). [11] J. Sather, Arch. Rational Mech. Analysis, 22, № 4, 292 (1966). [12] С. Я. Якубов, ДАН, 176, № 1, 46 (1967). [13] С. Я. Якубов, ДАН, 176, № 2, 279 (1967). [14] Tsutsumi Masayoshi, Iino Riichi, Proc. Japan Acad., 45, № 6, 466 (1969).