Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 517.949.21 *МАТЕМАТИКА*

А. А. ДЕЗИН

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И КОНСТРУКЦИЯ ТИПА СПЕНСЕРОВСКОЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 V 1970)

В статье рассмотрен вопрос о применении элементарного гомологического формализма, аналогичного используемому при изучении локальных свойств дифференциальных операторов ([1]), к исследованию глобальной разрешимости многомерных разностных уравнений. В частности, описан способ исследования разрешимости системы над заданным множеством точек сетки по свойствам ее над парой подмножеств, образующих разбиение исходного. Вопросы предельного перехода, т. е. перехода от разностных операторов к дифференциальным, не обсуждаются. Статья примыкает к работам ([2], [3]), где внутренним образом определенные системы разностных уравнений рассматривались как модели граничных задач.

Пусть $\mathbf{Z}^n$ — множество точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$ с целочисленными координатами $x_k=0,\mp1,\ldots$; $k=1,\ldots,n$. Интересующий нас элемент структуры в $\mathbf{Z}^n$ — наличие сдвигов $\tau_i x = x+1_i$, где 1_i — n-мерный вектор с единственной отличной от нуля компонентой — единицей, стоящей на i-м месте. Аналогично определяется сдвиг $\sigma_i=\tau_i^{-1}$. Пусть $X, Y, \ldots$ — подмножества $\mathbf{Z}^n$, для простоты конечные. Нас будут интересовать уравнения с неизвестными — вектор-функциями над точками $X, Y, \ldots$ и операторами, содержащими сдвиги. Желая подчеркнуть аналогию проводимых построений с некоторыми стандартными конструкциями, используемыми при рассмотрениях над дифференцируемыми многообразиями, введем терминологию, подобную употребительной в этом последнем «континуальном» случае.

Сопоставим каждой точке $x\in X$ N-мерное векторное пространство $E(x)$. Тогда функция над точками x со значениями в $\mathbf{R}^N$ есть элемент множества $\Gamma E(X)$ — сечений векторного расслоения над X. Под оператором будем понимать отображение вида $L\colon \Gamma E(X)\to\Gamma F(Y)$. На сечениях стандартным образом определены основные алгебраические операции, и можно говорить о линейных (относительно умножения на константы) операторах.

Обозначим через $\tau_i X$ множество, получаемое применением сдвига τ_i к каждому из элементов $x\in X$. Тогда $\tau X = \bigcup\limits_1^n \tau_i X$ и $\tilde X = X\cup\tau X$. Будем говорить, что оператор $L\colon \Gamma E(\tilde X)\to\Gamma F(X)$ **первого порядка**, если для любого сечения u значения Lu в $x\in X$ зависят лишь от значений u в $\tilde x$. Всякое уравнение над X, содержащее линейный оператор первого порядка, допускает, очевидно, запись вида

$$a_r^{ip}(x)\tau_i u_p(x) = f_r(x),\quad x\in X;$$
$$i=0,1,\ldots,n;\quad p=1,\ldots,N;\quad r=1,\ldots,M; \tag{L}$$

где $\tau_i u_p(x) = u_p(\tau_i x)$, τ_0 — тождественный оператор и по повторяющимся индексам (как и всюду в дальнейшем) предполагается суммирование. Наша задача — изучение некоторых общих вопросов, относящихся к разрешимости уравнений (L), в «правильном» случае $M=N$. Очевидно, если ограничиваться чисто алгебраической стороной вопроса, рассмотрение уравнений (L) эквивалентно рассмотрению разностных уравнений, в которых операторы τ_i заменены на операторы $\partial_i=\tau_i-\tau_0$, что и объясняет выбранное заглавие статьи.

Основной из интересующих нас в данной статье вопросов следующий: как по свойствам (L) над $Y\subset X$ и над $X = X\setminus Y$ сделать заключение о свойствах (L) над X (например, даже при $N = n = 1$, $X = 0,1$, из разрешимости для любой правой части каждого из двух уравнений не следует разрешимость для любой правой части соответствующей системы). Приведем конструкцию, позволяющую применить к этой задаче элементарный аппарат гомологической алгебры.

Вместе с основным расслоением E рассмотрим джет-расслоение, J^1, сопоставляющее каждому $x \in X$ $N(n+1)$-мерное векторное пространство $J^1(x)$ векторов $\{\xi_{ip}(x)\}$ и отображение

$$j^1\colon \Gamma E(\tilde{x}) \to J^1(x); \quad u \to \xi,$$

определяемое равенствами $\xi_{ip} = \tau_i u_p$; $i = 0, \ldots, n$; $p = 1, \ldots, N$. Исходное E может быть отождествлено с подрасслоением $J^0 \subset J^1$, определяемым векторами $\{\xi_{0p}\}$. Кроме того, рассмотрим расслоение $J^0 \otimes T$ (аналог касательного или кокасательного), каждому $x \in X$ сопоставляющее Nn-мерное векторное пространство векторов $\{\alpha_{sp}(x)\}$; $s = 1, \ldots, n$; и определим отображение

$$D\colon J^1(x) \oplus J^0(\tau x) \to J^0(x) \otimes T, \quad \xi \to \alpha,$$

по правилу: $\alpha_{sp}(x) = D_s\xi_p \equiv \xi_{sp}(x) - \xi_{0p}(\tau_s x)$. Если ввести еще множество $bX = \tilde{X} \setminus X$, то без труда проверяется утверждение, в очевидных обозначениях имеющее вид: последовательность

$$0 \to \Gamma E(\tilde{X}) \xrightarrow{j} J^1(X) \oplus J^0(bX) \xrightarrow{D} J^0(X) \otimes T \to 0 \tag{1}$$

точна (на bX использовано вложение $j = j^0$). Следует отметить, что D есть тоже отображение сечений, но мы опускаем символ Γ, чтобы не загромождать записи.

Определим теперь одномерный комплекс $K(X) = K^1(X) \oplus K^0(X)$ так, чтобы сечения расслоений, определяемых третьим и четвертым членами последовательности (1), определяли 1-мерные и 0-мерные цепи K с вещественными коэффициентами, а граничный оператор индуцировался бы оператором D. Для этого сопоставим каждому $x \in \tilde{X}$ наборы образующих: $\{e^{kp}(x)\}$, $x \in X$; $\{e^{0p}(x)\}$, $x \in bX$ в K^1 и $\{h^{sp}(x)\}$, $x \in X$ в K^0. Тогда, если

$\xi = \sum\limits_{x \in \tilde{X}} \xi_{kp}(x) e^{kp}(x)$ и

$$D\xi = \sum \xi_{kp}(x) De^{kp}(x) = \alpha = \sum \alpha_{sp}(x) h^{sp}(x), \tag{2}$$

и мы хотим, чтобы α_{sp} в (2) вычислялись в соответствии с приведенным ранее определением $D_s\xi_p$, то следует положить

$$De^{sp}(x) = h^{sp}(x); \quad s = 1, \ldots, n; \quad De^{0p}(x) = -\sum_s{}' h^{sp}(\sigma_s x), \tag{3}$$

где последняя сумма берется по значениям s, для которых $\sigma_s x \in X$.

Если теперь $X \supset Y$ — некоторое подмножество в X, то для Y, в свою очередь, осуществимы приведенные построения и, в частности, определен комплекс $K(Y) = K^0(Y) \oplus K^1(Y) \subset K(X)$, т. е. являющийся подкомплексом (незамкнутым!) в X. Это открытый подкомплекс в $K(X)$ в том смысле, что подкомплекс $K[Z] = K(X) \setminus K(Y)$, связанный с множеством $Z = X \setminus Y$, замкнут. Под замкнутостью понимается перестановочность вложения $I\colon K[Z] \to K(X)$ и операции D. (Мы отклоняемся здесь от стандартной терминологии ([4]), когда подкомплексом называется только замкнутый подкомплекс). Квадратные скобки в обозначении $K[Z]$ указывают, что этот комплекс для множества Z определяется по рецепту, отличному от принятого для $K(X)$, $K(Y)$.

Для проверки замкнутости $K[Z]$ удобно ввести обозначения: $rZ = bZ \setminus (bZ \cap Y)$; $Z' = Z \cap bY$; $mZ = Z \setminus Z'$.

Тогда, если воспользоваться представлением

$$K^1[Z] = J^1(mZ) \oplus G^1(Z') \oplus J^0(rZ),$$

где $G^1(x) = J^1(x) \ominus J^0(x)$ — «главная часть» J^1, и заметить, что $K^0[Z] = K^0(Z)$, замкнутость $K[Z]$ следует из формул (3).

Перейдем теперь к изучению уравнений (L). Исходя из нашей схемы, следует определить над X тривиальный комплекс $F(X)$ (сопоставив каждому $x \in X^*$ систему образующих $\{\varphi^p(x)\}_1^N$ и элементу $f \in \Gamma F(X)$ соответствующую цепь). Тогда можем определить гомоморфизм $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$: $K^1(X) \to F(X)$; $\xi \to f$, положив $f_q(x) = a_q^{ip}(x)\xi_{ip}(x)$, $x \in X$ и $\mathcal{L}$: $J^0(bX) \to 0$, так что последовательность

$$0 \to R^1(X) \oplus J^0(bX) \to J^1(X) \oplus J^0(bX) \to F(X) \to 0,$$

содержащая описание ядра $\mathcal{L}$, точна.

Будем предполагать в дальнейшем, что система (L) *невырожденная*, т. е. $\dim R^1(x) = nN$ для любого $x \in X$. Хотим теперь определить свободный комплекс $Q(X) = Q^1(X) \oplus Q^0(X)$, положив $Q^0(X) \simeq K^0(X)$ (и сохраняя прежние обозначения для образующих) и фиксировав в каждой точке $x \in X$ систему образующих $\{\varepsilon^\rho(x)\}$ ($\rho = 1, \ldots, nN$, если $x \in X$ и $\rho = 1, \ldots, N$, если $x \in bX$) для $Q^1(X)$ так, что $Q^1(X) \simeq R_1(X) \oplus J^0(bX)$. Тогда гомоморфизм $\varkappa(x): \varepsilon^\rho(x) \to \varkappa_{iq}{}^\rho(x) e^{iq}(x)$, тождественный на bX, в точках $x \in X$ должен удовлетворять N условиям ортогональности: $(a_r, \varkappa^\rho) = a_r^{iq}(x)\varkappa_{iq}{}^\rho(x) = 0$; $r = 1, \ldots, N$. Выбор $\varkappa$ (или системы образующих в $Q^1(X)$) есть, очевидно, выбор некоторой параметризации ядра $\mathcal{L}$.

Граничный оператор D_Q: $Q^1(X) \to Q^0(X)$ определим, положив $D_Q = D \circ \varkappa$ ($\varkappa(\varepsilon^\rho)$ рассматривается как цепь в K^1 и Q^0 отождествлено с K^0). Тогда для гомологий комплекса $Q(X)$, обозначаемых $H^1(X)$, $H^0(X)$, будем иметь

$$\dim H^1(X) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{L}, \quad \dim H^0(X) = \dim \operatorname{Coker} \mathcal{L}, \tag{4}$$

т. е. они определяют размерность ядра и число условий разрешимости системы уравнений (L) над X.

Среди параметризаций $\varkappa$ наибольший интерес представляют имеющие в каждой точке вид

$$\varkappa: \varepsilon^{i'p'} \to e^{i'p'} + \varphi_\beta^{i'p'} e^\beta; \quad \beta = 1, \ldots, N; \tag{5}$$

(мы опускаем аргумент x), где пары (i', p') (заменяющие индекс ρ) принадлежат некоторому подмножеству (из nN элементов) множества всех $N(n+1)$ пар, а для пар (i'', p'') дополнительного подмножества введена, для удобства записи, нумерация некоторым индексом β. Параметризации (5) получаются, очевидно, за счет выбора в каждой точке некоторого отличного от нуля минора порядка N в матрице коэффициентов уравнения (L). Будем говорить, что (L) в точке x обладает *невырожденной главной частью*, если отображение (5) может быть выбрано так, что пары $(0, p)$ для любого p принадлежат множеству (i', p'). Соответствующую параметризацию будем называть *правильной*.

Пусть теперь снова Y — некоторое подмножество в X. Можем по приведенному рецепту определить одномерный комплекс $Q(Y)$ (считая, что гомоморфизмы $\varkappa(x)$ выбраны раз и навсегда для любого $x \in X$). Пусть $Q\{Y\}$ — подкомплекс в $Q(X)$, натянутый на образующие $\varepsilon^\rho(x)$, $h^{k\rho}(x)$, вошедшие в $Q(Y)$. Пусть множества Z, Z', и т. д. определены как и раньше.

Предложение 1. *При невырожденности главной части (L) в точках $x \in Z'$ и правильной параметризации справедливо равенство*: $Q\{Y\} = Q(Y)$.

Действительно, единственный факт, нуждающийся в проверке,— совпадение $\varkappa$ с тождественным отображением на bY, немедленно следует в этом случае из (5).

Условия предложения 1 будем в дальнейшем предполагать выполненными. Пусть, как и в случае комплекса $K(X)$, введен $Q[Z] = Q(X) \ominus \ominus Q(Y)$.

Предложение 2. *Подкомплекс $Q[Z]$ замкнут в $Q(X)$.*

Утверждение следует из формул (3), (5).

Имеем, таким образом, точную последовательность одномерных комплексов

$$0 \to Q[Z] \xrightarrow{I} Q(X) \xrightarrow{\pi} Q(Y) \to 0, \tag{6}$$

(где I и π обозначают, как обычно, вложение и проекцию), связанную с множествами X, Y и $Z = X \setminus Y$ и системой (L). Отметим, что если для вычисления гомологий $Q(Y)$ следует рассмотреть просто свойства сужения исходной системы (L) на Y, то гомологии $Q[Z]$ определяются рассмотрением над Z некоторой модифицированной системы $[L]$, получаемой в соответствии с введенными определениями.

С (6), как обычно ([4]), связана точная последовательность групп гомологий

$$0 \to H^1[Z] \to H^1(X) \to H^1(Y) \to H^0[Z] \to H^0(X) \to H^0(Y) \to 0,$$

содержащая информацию о разрешимости (L) над X (ср. (4)) в терминах разрешимости соответствующих систем над Y и Z.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Спенсер, Сборн. переводов, Математика, 14, № 2 (1970). [2] А. А. Дезин, Сибирск. матем. журн., 9, № 5 (1968). [3] А. А. Дезин, Дифференциальные уравнения, 6, № 1 (1970). [4] П. Дж. Хилтон, С. Уайли, Теория гомологий, М., 1966.