Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 517.9+517.948.35 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. ДУБИНСКИЙ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 VI 1970)

В работе вводятся классы квазиэллиптических и квазигиперболических дифференциально-операторных уравнений высокого порядка в банаховом пространстве. На полуоси $R_+^1 \equiv [0, +\infty)$ изучаются общие краевые задачи для этих уравнений в пространствах Соболева — Слободецкого с весом $\exp(-\gamma t)$, $-\infty < \gamma < +\infty$. Устанавливается нормальная разрешимость поставленных задач; индекс соответствующих отображений является функцией параметра γ и спектральных значений оператора A.

Обозначения. E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, A — замкнутый оператор в E с плотной областью определения $D(A)$; $u(t): R_+^1 \to E$ — функция, принимающая значения в E, $u^{(j)} \equiv d^{(j)}u / dt^j$.

Далее $H(r, A^r; q, 0)$ — пространство с нормой

$$\|u(t)\|^q_{r;\,q,\,0} \equiv \sum_{j=0}^{r} \int_0^\infty \|A^{r-j}u^{(j)}(t)\|^q\,dt,$$

где $r \geqslant 0$ — целое число, $q \geqslant 1$; $H(r, A^r; q, \gamma)$ — пространство функций $u(t)$ таких, что $u(t)\exp(-\gamma t) \in H(r, A^r; q, 0)$.

I. Краевые задачи в гильбертовом пространстве.

1. Случай самосопряженного оператора. Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве E, $(Au, u) \geqslant \lambda_0(u, u)$, $\lambda_0 > 0$.

Определение 1. Оператор

$$\mathfrak{A}\left(\frac{d}{dt}, A\right)u \equiv \sum_{j=0}^{s} a_j A^{s-j}u^{(j)}(t), \quad s \geqslant 1, \quad a_j \in C^1,$$

называется квазиэллиптическим, если для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство $\mathfrak{A}(i\tau, \lambda) \neq 0$, $-\infty < \tau < +\infty$.

В противном случае оператор $\mathfrak{A}(d/dt, A)u$ называется квазигиперболическим.

Пусть оператор $\mathfrak{A}$ квазиэллиптичен. Ставится задача

$$\mathfrak{A}(d/dt, A)u = h(t), \tag{1}$$

$$\sum_{l=0}^{n_\nu} b_l A^{n_\nu - l}u^{(l)}(0) = \varphi_\nu, \tag{2}$$

где $b_l \in C^1$, $n_\nu \geqslant 0$ — произвольные числа; $\nu = 1, \ldots, m_-$, m_- — число корней $\mu_j(\lambda)$ уравнения $\mathfrak{A}(\mu, \lambda) = 0$, $\lambda \in \sigma(A)$, таких, что $\operatorname{Re}\mu_j(\lambda) < 0$.

Предполагается, что граничные условия (2) связаны с уравнением (1) условием типа условия Шапиро — Лопатинского (условием дополнительности).

Обозначения. а) Положим $\mu_* = \max \operatorname{Re}\mu_j(\lambda)$, где $\operatorname{Re}\mu_j(\lambda) < 0$; $\mu^* = \min \operatorname{Re}\mu_j(\lambda)$, где $\operatorname{Re}\mu_j(\lambda) > 0$, $\lambda \in \sigma(A)$; б) $Z = \{\gamma \in R^1, \gamma = \operatorname{Re}\mu_j(\lambda), j = 1, \ldots, s, \lambda \in \sigma(A)\}$.

Теорема 1. *Пусть оператор $\mathfrak{A}$ квазиэллиптичен, $h(t) \in H(r-s, A^{r-s}; 2, \gamma)$, $\varphi_\nu \in D(A^{r-n_\nu-1/2})$ произвольны. Тогда для любого $\gamma \in (\mu_*, \mu^*)$*

задача (1), (2) *имеет единственное решение* $u(t) \in H(r, A^r; 2, \gamma)$ (*т. е. соответствующее отображение есть изоморфизм*).

Следствие 1. *Пусть оператор* $\mathfrak{A}$ *квазиэллиптичен, спектр* $\sigma(A)$ *оператора* A *дискретен, конечнократен и* $(Au, u) \geqslant \lambda_0(u, u)$, $\lambda_0 > -\infty$.

Тогда для любого $\gamma \overline{\in} Z$ (*Z дискретно*) *задача* (1), (2) *имеет конечномерные ядро и коядро.*

При этом справедливо неравенство

$$\|u\|_{r;\,2,\,\gamma} \leqslant C\Big(\|h\|_{r-s;\,2,\,\gamma} + \sum_{\nu=1}^{m_-} \|A^{r-n_\nu-1/2}\varphi_\nu\| + \|u\|_{0;\,2,\,\gamma}\Big),$$

где $C > 0$ — *постоянная.*

Замечание. В исключительных точках $\gamma \in Z$ ядро задачи конечномерно, но бесконечномерно коядро.

Пусть теперь оператор $\mathfrak{A}$ квазигиперболичен. В этом случае могут быть поставлены корректно две различные задачи: задача (1), (2) и задача

$$\mathfrak{A}(d/dt, A)u = h(t), \tag{3}$$

$$\sum_{l=0}^{n_\nu} b_l A^{n_\nu - l} u^{(l)}(0) = \varphi_\nu, \tag{4}$$

$\nu = 1, \ldots, m_- + k$, где k — число чисто мнимых корней уравнения $\mathfrak{A}(\mu, \lambda) = 0$, $\lambda > 0$.

Теорема 2. *Пусть оператор* $\mathfrak{A}$ *квазигиперболичен,* $h(t) \in \in H(r - s + m, A^{r-s+m}; 2, \gamma)$, $\varphi_\nu \in D(A^{r-n_\nu+m-1})$, *где* m — *максимальная кратность мнимых корней* $\mu_j(\lambda)$. *Тогда для любого* $\gamma \in (\mu_*, 0)$ *задача* (1), (2) *имеет единственное решение* $u(t) \in H(r, A^r; 2, \gamma)$, *причем*

$$\|u\|_{r;\,2,\gamma} \leqslant C\Big(\|h\|_{r-s+m;\,2,\gamma} + \sum_{\nu=1}^{m_-} \|A^{r-n+m-1}\varphi_\nu\|\Big). \tag{5}$$

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 задача* (3), (4) *однозначно разрешима в* $H(r, A^r; 2, \gamma)$ *для любого* $\gamma \in (0, \mu^*)$, *причем справедлива оценка типа* (5).

Следствие 2. *Пусть оператор* $\mathfrak{A}$ *квазигиперболичен и спектр* $\sigma(A)$ *дискретен и конечно кратен. Тогда для любого* $\gamma < 0$, $\gamma \overline{\in} Z$, *задача* (1), (2) *нормально разрешима, т. е. имеет конечномерное ядро и разрешима при конечном числе условий* (*типа условий ортогональности*) *на* $h(t)$. *При этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{r;\,2,\,\gamma} \leqslant C\Big(\|h\|_{r-s+m;\,2,\,\gamma} + \sum_{\nu=1}^{m_-} \|A^{r-n_\nu+m-1}\varphi_\nu\| + \|u\|_{0;\,2,\,\gamma}\Big).$$

Аналогичное утверждение верно при $\gamma > 0$, $\gamma \overline{\in} Z$, для задачи (3), (4).

Замечание. Если все корни чисто мнимы, т. е. оператор $\mathfrak{A}(d/dt, A)$ гиперболичен, то ядро и «коядро» соответствующих задач равно нулю.

2. Общий случай. Пусть оператор A удовлетворяет следующим условиям: 1) $\sigma(A) \subset S = \{z \mid 0 \leqslant |\arg z| \leqslant \pi/2 - \theta,\ \theta > 0$ — некоторое число, $0 \overline{\in} \sigma(A)$. 2) для любого луча $\arg z = \alpha$, $\pi/2 - \theta < |\alpha| < \pi/2$, имеет место оценка резольвенты $\|(A - z)^{-1}\| \leqslant C(1 + |z|)^{-1}$, $C = C(\alpha) > 0$.

Определение 2. Оператор $\mathfrak{A}$ называется квазиэллиптическим, если оператор A удовлетворяет условиям 1), 2) и для любого $\lambda \in S \setminus \{0\}$ имеет место неравенство $\mathfrak{A}(i\tau, \lambda) \neq 0$, $-\infty < \tau < +\infty$.

Теорема 4. *Пусть оператор* $\mathfrak{A}$ *квазиэллиптичен,* $\gamma \in (\mu_*, \mu^*)$. *Тогда для любой* $h(t) \in H(r-s, A^{r-s}; 2, \gamma)$ *задача*

$$\mathfrak{A}(d/dt, A)u = h(t), \tag{6}$$

$$u(0) = 0, \ldots, u^{(m_- -1)}(0) = 0 \tag{7}$$

имеет единственное решение $u(t) \in H(r, A^r; 2, \gamma)$, *т. е. соответствующее отображение есть изоморфизм.*

Следствие 3. *Пусть спектр* $\sigma(A)$ *дискретен, конечнократен и расположен в* $S^\tau u$, *быть может, в круге* $|z| < R$, $R > 0$ — *некоторое число. Тогда для любого* γ, *исключая дискретное множество, задача* (6), (7) *имеет конечномерные ядро и коядро.*

II. Краевые задачи в банаховом пространстве. Пусть E — банахово пространство, A — удовлетворяет условиям 1), 2).

Обозначение. $H(\nu, r, A^r; q, \gamma)$ есть пространство функции с нормой

$$\|u\|^q_{\nu, r; q, \gamma} = \int_0^\infty \|\tau^\nu A(A+\tau)^{-1} u(t)\|^q_{r; q, \gamma}\, d\tau/\tau,$$

где A рассматривается как оператор в $H(r, A^r; q, \gamma)$ с областью определения $D(A) = \{u(t) \in H(r, A^r; q, \gamma) \mid Au \in H(r, A^r; q, \gamma)\}$.

Теорема 5. *Пусть оператор* $\mathfrak{A}$ *квазиэллиптичен,* $\gamma \in (\mu_*, \mu^*)$. Тогда *для любой* $h(t) \in H(\nu, r-s, A^{r-s}; q, \gamma)$ *задача*

$$\mathfrak{A}(d/dt, A)u = h(t), \tag{8}$$

$$\sum_{l=0}^{n_\nu} b_l A^{n_\nu - l} u^{(l)}(0) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, m_-, \tag{9}$$

имеет единственное решение $u(t) \in H(r, A^r; q, \gamma)$, *т. е. соответствующее отображение — изоморфизм.*

Следствие 4. *В условиях следствия 3 для любого* γ, *исключая дискретное множество, задача* (8), (9) *нормально разрешима. При этом*

$$\|u\|_{\nu, r; q, \gamma} \leqslant C(\|h\|_{\nu, r-s; q, \gamma} + \|u\|_{0; q, \gamma}), \quad C > 0.$$

III. Метод доказательства. Доказательства теорем основаны на явном решении соответствующих задач, аформализации получающихся спектральных интегралов для «гладких» данных задачи и последующего замыкания. В случае банахова пространства существенно используется, кроме того, явный вид решения задачи (6), (7) и техника интерполяционных пространств типа пространств, порождаемых дробными степенями слабо позитивных операторов (см. например, [1, 2]).

IV. Имеются многочисленные примеры смешанных задач для нестандартных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в цилиндрических (по t) областях.

Автор признателен С. Г. Крейну за полезные обсуждения.

Московский энергетический
институт

Поступило
5 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967. [2] P. Grisvard, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 21, F. III, 307 (1967).